МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Курс лекций по функциональному анализу

Лектор — Анатолий Михайлович Стёпин

III курс, 5 семестр, поток математиков

Москва, 2004 г.

Оглавление

Введение

Предисловие

Видишь, в этих строках
Где-то спрятан обман
А тут — сто теорем —
Разыщи-ка его...
А когда надоест,
Забей на функан,
Ботай дифгем,
Ботай дифгем,
Ботай дифгем...

Убедительная просьба ко всем читателям: в случае обнаружения ошибок немедленно сообщайте авторам на `dmvn@mccme.ru` или загляните на `http://dmvn.mexmat.net` и посмотрите, где можно достать в настоящее время самих авторов. Все пожелания и предложения по поводу оформления и содержания документа будут обязательно приняты к сведению.

В этой версии исправлено ещё несколько опечаток, а также устранена неточность в следствии теоремы Рисса – Фишера. Также просим всех читателей обратить внимание на приложение к лекциям. В нём вы найдёте много интересного.

Слова благодарности

Огромное спасибо Юре Малыхину за обнаружение опечаток и устранение дефектов в доказательствах. В настоящее время от его многочисленных пакетов исправлений осталось не так уж много, а это весьма позитивно.

Почти все поправки от Миши Малинина была успешно внесены в документ. Его решение задачи про сжимающие отображения выиграло конкурс и было помещено в текст. Также добавлено решение задачи про вложенные шары, присланное Митей Гусевым. Исправлена неточность в определении гильбертова пространства, замеченная Колей Масловым.

Отдельная благодарность выносится Юре Притыкину за просвещение в области компактных операторов, Илье Питерскому за многочисленные замечания и поиск опечаток, а также Мише Берштейну и Мише Левину за одну очень полезную лемму.

Принятые в тексте соглашения и используемые сокращения

1° Следуя [1], топологические понятия обозначаются сокращениями соответствующих английских слов. Так, $\operatorname{Int} A$ — множество внутренних точек множества A, $\operatorname{Cl} A$ — замыкание множества A.

2° Область определения будем обозначать символом Dom (от английского *domain*).

3° Пространства функций обозначаются жирными буквами: **VB** — функции ограниченной вариации, **C** — непрерывные, **B** — ограниченные.

4° Пространства операторов и линейных функционалов мы иногда будем обозначать буквами вида $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$.

Список литературы приведён здесь не случайно. Без этих книжек лекции были бы сборником ошибочно сформулированных и (не)доказанных теорем.

Литература

[1] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. *Начальный курс топологии.* — М.: Наука, 1977.

[2] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* — М.: Наука, 1981.

[3] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. *Элементы функционального анализа.* — М.: Наука, 1965.

[4] Э. Б. Винберг. *Курс алгебры.* — М.: Факториал, 2002.

[5] А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. *Теоремы и задачи функционального анализа.* — М.: Наука, 1988.

[6] И. М. Глазман. *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.* — М.: Физматгиз, 1963.

[7] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* — М.: Физматгиз, 1963.

Последняя компиляция: 2 апреля 2010 г.
Обновления документа — на сайтах `http://dmvn.mexmat.net`, `http://dmvn.mexmat.ru`.
Об опечатках и неточностях пишите на `dmvn@mccme.ru`.

1. Гильбертовы пространства

1.1. Операторы в гильбертовых пространствах

1.1.1. Основное понятие

Определение. *Гильбертовым* пространством называется бесконечномерное евклидово пространство, полное относительно нормы, задаваемой скалярным произведением: $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$. Его мы обычно будем обозначать буквой H.

Задача 1.1. *Проверить, что так заданная норма удовлетворяет всем аксиомам нормы.*

1.1.2. Сопряжённые операторы

Определение. Пусть A — ограниченный оператор в H. Если оператор B таков, что $(Ax,y) = (x,By)$ для всех $x,y \in H$, то B называется *сопряжённым* к A и обозначается A^*. Если $A = A^*$, то A называется *самосопряжённым.*

Замечание. Существование оператора, сопряжённого к ограниченному, будет доказано позже.

Отношение сопряжённости является симметричным: если B сопряжён к A, то A сопряжён к B. Действительно, имеем

$$(Ax,y) = (x,By) \ \Leftrightarrow\ \overline{(Ax,y)} = \overline{(x,By)} \ \Leftrightarrow\ (By,x) = (y,Ax),$$

а это и означает, что оператор A сопряжён к B.

Утверждение 1.1. *Имеет место соотношение* $(A^*)^* = A$.

☐ По определению имеем для всех x,y

$$\begin{cases}(Ax,y) = (x,A^*y),\\ \big((A^*)^*x,y\big) = \big(x,A^*y\big);\end{cases} \quad\Rightarrow\ \big(Ax,y\big) = \big((A^*)^*x,y\big) \ \Leftrightarrow\ \big((A-(A^*)^*)x,y\big) = 0,$$

но из невырожденности скалярного произведения следует $\big(A-(A^*)^*\big)x = 0$ для всех x, поэтому $A = (A^*)^*$. ■

Утверждение 1.2. *Оператор A^*A является самосопряжённым.*

☐ Имеем $(ABx,y) = (Bx,A^*y) = (x,B^*A^*y)$, откуда $(AB)^* = B^*A^*$. Поэтому $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$. ■

Лемма 1.3 (Фундаментальное равенство). *Имеет место равенство* $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

☐ Покажем, что $\|A^*\| = \|A\|$. Действительно, $\|Ax\|^2 = (Ax,Ax) = (A^*Ax,x) \leqslant \|A^*A\|\cdot\|x\|^2$ по неравенству Коши–Буняковского. Перейдём к верхней грани по $\|x\| = 1$, получим $\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\| \leqslant \|A^*\|\cdot\|A\|$, откуда $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Меняя в этих выкладках местами операторы A и A^*, получаем обратное неравенство.

Рассмотрим $\|Ax\|^2 = (Ax,Ax) = (A^*Ax,x) \leqslant \|A^*A\|\cdot\|x\|^2$. Снова переходя к верхней грани по $\|x\| = 1$, получим $\|A\|^2 \leqslant \|A^*A\| \leqslant \|A^*\|\cdot\|A\| = \|A\|^2$. Значит, на самом деле, тут всюду равенства. ■

1.1.3. Лемма об ортогональной проекции и её следствия

Лемма 1.4 (Об ортогональной проекции). *Пусть H_0 — замкнутое подпространство в H. Тогда для любого вектора $h \in H \smallsetminus H_0$ найдётся единственный ближайший вектор из H_0.*

☐ Имеем $\rho(h,H_0) =: a > 0$ в силу того, что одно из этих множеств замкнуто, а второе компактно. Выберем последовательность $\{h_n\} \subset H_0$ так, чтобы $\rho(h_n,h) \to a$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\{h_n\}$ фундаментальна. Нам понадобится тождество параллелограмма: «сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон». В силу этого тождества для достаточно больших n и m получаем

$$\|h_n - h_m\|^2 = 2\,\|h-h_n\|^2 + 2\,\|h-h_m\|^2 - 4\left\|h - \frac{h_n+h_m}{2}\right\|^2 \leqslant 2(a^2+\varepsilon) + 2(a^2+\varepsilon) - 4a^2 = 4\varepsilon,$$

и тем самым фундаментальность установлена.

Далее, H_0 — замкнутое подпространство полного пространства, и потому оно полно. Следовательно, $\{h_n\}$ сходится к некоторому элементу $h_0 \in H_0$. По непрерывности имеем $\rho(h_n,h) \to \rho(h_0,h)$. С другой стороны, этот предел равен a в силу выбора h_n. Следовательно, $\rho(h_0,h) = a$. ■

Следствие 1.1. *Пусть $H_0 \subset H$ — замкнутое подпространство. Всякий вектор $h \in H$ представим в виде $h = h_0 + g$, где $h_0 \in H_0$, а $g \in H_0^{\perp}$.*

☐ Пусть $x \in H_0$. По лемме, функция $d(x) := \|h-x\|^2$ достигает минимума на некотором векторе $h_0 \in H_0$. Поэтому функция $\varphi(t) := \|h-h_0+tx\|^2$ имеет минимум при $t = 0$. Тогда $\varphi'(0) = 0$. Распишем скалярный квадрат: $\varphi(t) = (h-h_0+tx, h-h_0+tx) = \|h-h_0\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(x, h-h_0) + t^2(x,x)$, поэтому $\varphi'(0) = 2\,\mathrm{Re}(x, h-h_0) = 0$. Далее, вместо вектора x рассматривая вектор $i \cdot x$, получаем $\mathrm{Im}(x, h-h_0) = 0$. Следовательно, $(x, h-h_0) = 0$. Таким образом, всякий вектор $x \in H_0$ ортогонален вектору $h-h_0$, то есть $h-h_0 \in H_0^\perp$. Тождество $h = h_0 + (h-h_0)$, очевидно, является искомым разложением. ■

1.1.4. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве

Лемма 1.5 (Рисса). *Пусть f — ограниченный функционал. Тогда найдётся вектор $h_0 \in H$, для которого $f(x) = (x, h_0)$.*

□ Если $f \equiv 0$, то доказывать нечего: берём $h_0 := 0$. Пусть теперь $f \neq 0$. Очевидно, ядро $K := \mathrm{Ker}\, f$ — замкнутое подпространство. Покажем, что $\dim K^\perp = 1$. Рассмотрим ненулевые вектора $h_1, h_2 \in K^\perp$. Рассмотрим вектор
$$v = f(h_1)h_2 - f(h_2)h_1.$$
С одной стороны, $v \in K^\perp$ как линейная комбинация векторов из $K^\perp$. С другой стороны, он лежит и в K, потому что $f(v) = f(h_1)f(h_2) - f(h_2)f(h_1) = 0$. Но $K \cap K^\perp = 0$, поэтому $v = 0$, следовательно вектора h_1 и h_2 пропорциональны.

Рассмотрим уравнение $f(x) = (x, \mu h_1)$, где μ — неизвестное. Определим его, подставив $x = h_1$: получим $F(h_1) = \overline{\mu}(h_1, h_1)$. Итак, μ найдено. Тогда для всякого $x \in K^\perp$ имеем $f(x) = (x, \mu h_1)$. В самом деле, $x = \lambda h_1$, поэтому
$$f(x) = f(\lambda h_1) = \lambda f(h_1) = \lambda(h_1, \mu h_1) = (\lambda h_1, \mu h_1) = (x, \mu h_1).$$
Аналогично, если $x \in K$, то равенство тоже верно: и слева, и справа получаем ноль. Но поскольку $H = K \oplus K^\perp$, по следствию из леммы об ортогональной проекции это верно и на всём пространстве. ■

Утверждение 1.6. *Сопряжённый оператор существует.*

□ Пусть A — ограниченный линейный оператор в H. Зафиксируем $y \in H$ и рассмотрим функционал $f(x) := (Ax, y)$. Линейность его очевидна, а ограниченность следует из неравенства Коши – Буняковского:
$$|(Ax, y)| \leqslant \|Ax\| \cdot \|y\| \leqslant \|A\| \cdot \|y\| \cdot \|x\|.$$
По лемме Рисса получаем $f(x) = (x, A^*y)$, где A^*y — обозначение для сопряжённого оператора, применённого к вектору y.

Проверим корректность определения. Пусть мы получили таким способом два вектора v_1 и v_2. Для них имеем $(Ax, y) = (x, v_1) = (x, v_2)$, причём это верно для любого x. Таким образом, для всех x имеем $(x, v_1 - v_2) = 0$. Подставим $x = v_1 - v_2$, получим $(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = 0$, откуда $v_1 = v_2$.

Очевидно, что получаемый таким способом оператор будет линейным. Контрольный вопрос: а нужно ли доказывать его ограниченность? ■

1.1.5. Ортонормированные системы

Определение. ОНС называется *полной*, если её линейная оболочка всюду плотна в H.

Определение. Пусть $\{e_n\}$ — ОНС в H. *Наилучшим приближением* вектора $x \in H$ по системе $\{e_n\}$ порядка N называется число
$$E_N(x) := \inf_{\alpha_k} \Big\| x - \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \Big\|.$$

Теорема 1.7. *Пусть $\{e_n\}$ — ОНС в H. Тогда наилучшее приближение порядка N равно*
$$E_N(x) = \Big\| x - \sum_{k=1}^N (x, e_k) e_k \Big\|.$$

□ Положим $c_k = (x, e_k)$. В силу ортонормированности системы имеем
$$\Big\| x - \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \Big\|^2 = \Big(x - \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \Big) = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^N \overline{\alpha}_k c_k + \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 \overset{!}{=} \|x\|^2 + \sum_{k=1}^N |\alpha_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^N |c_k|^2.$$
Проверка равенства, отмеченного знаком «!», предоставляется читателю. Из этой формулы видно, что выражение достигнет своего минимума, когда станет нулём второе слагаемое в последнем выражении. А это будет в точности тогда, когда $\alpha_k = c_k$. ■

Следствие 1.2 (Неравенство Бесселя).

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2 .$$

□ Для конечных сумм это неравенство верно в силу только что доказанной теоремы, поскольку наилучшее приближение неотрицательно, и

$$E_N^2(x) + \sum_{k=1}^{N} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2 .$$

Ясно, что при переходе к пределу неравенство не испортится. ■

Теорема 1.8 (Рисса – Фишера). *Пусть H — гильбертово пространство, $\{e_k\}$ — ОНС в нём, и $(c_k) \in \ell_2$. Тогда существует $h \in H$, для которого $(h, e_k) = c_k$. Иными словами, существует вектор с предписанными коэффициентами Фурье из ℓ_2.*

□ Поищем h в виде суммы ряда $\sum c_k e_k$ и покажем, что этот ряд сходится. Рассмотрим $h_n := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Проверим фундаментальность последовательности $\{h_n\}$. Пусть $m > n$, тогда

$$\|h_m - h_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k, \sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k \right) \overset{!}{=} \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0$$

при $m, n \to \infty$ как кусок хвоста сходящегося ряда (ведь $(c_k) \in \ell_2$). Равенство, отмеченное «!», следует из ортонормированности системы $\{e_n\}$. В силу полноты пространства, последовательность h_n сходится к некоторому вектору $h \in H$. То, что вектор h имеет нужные коэффициенты Фурье, очевидно. ■

Утверждение 1.9 (Равенство Парсеваля). *Пусть $\{e_n\}$ — полная ОНС в гильбертовом пространстве H, а $c_k := (h, e_k)$. Тогда*

$$\|h\|^2 = \sum |c_n|^2. \tag{1}$$

□ В силу непрерывности скалярного произведения и ортонормированности $\{e_n\}$ получаем

$$(h, h) = \lim_n (h_n, h_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \sum |c_k|^2. \tag{2}$$

■

Задача 1.2. *Доказать, что если $\{e_n\}$ — полная ортонормированная система, то вектор h в теореме Рисса – Фишера единствен.*

Решение. Пусть нашлись два вектора с одинаковыми коэффициентами Фурье. Их разность, очевидно, имеет нулевые коэффициенты Фурье. Но такой вектор может быть только нулём в силу равенства Парсеваля. Значит, на самом деле векторы равны. ■

Теорема 1.10. *В сепарабельном евклидовом пространстве H существует полная ортонормированная система.*

□ Пусть последовательность $\{h_i\}$ такова, что $\mathrm{Cl}\{h_i\} = H$. Можно считать, что все h_i отличны от нуля. Возьмём $e_1 := \frac{h_1}{\|h_1\|}$. Если $\langle e_1 \rangle = H$, то ПОНС найдена. В противном случае найдётся ещё один вектор из счётного всюду плотного множества (без ограничения общности это h_2) такой, что $h_2 \notin \langle e_1 \rangle$. Если уже выбрано $(n-1)$ взаимно ортогональных векторов $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ единичной длины, и $h_n \notin \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$, то найдём единичный вектор $e_n \in \langle e_1, \ldots, e_{n-1}; h_n \rangle$ такой, что $e_n \perp \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$. Поищем его в виде

$$e_n = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{n-1} e_{n-1} + h_n.$$

Домножая это равенство скалярно на $e_1, \ldots, e_{n-1}$, получаем систему уравнений на λ_i:

$$0 = (e_n, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) + (h_n, e_i) = \lambda_i + (h_n, e_i), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Решая её и нормируя полученный вектор e_n, добавляем его в базис. Если пространство бесконечномерно, этот процесс никогда не оборвётся, и в итоге мы получим счётную систему взаимно ортогональных векторов $\{e_i\}$.

Покажем её полноту. Полнота системы означает, что всякий вектор можно сколь угодно точно приблизить конечной линейной комбинацией векторов из этой системы. Таким свойством обладало семейство $\{h_i\}$, но так как h_i линейно выражаются через e_i (впрочем, и наоборот тоже), то оно переносится и на $\{e_i\}$.

Покажем, что если $g \perp \{e_i\}$, то $g = 0$. В самом деле, приблизим этот вектор линейной комбинацией векторов $\{e_i\}$, получим вектор g_ε. Тогда $(g_\varepsilon, g) = 0$, но, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ (увеличивая точность приближения), получаем, что $(g, g) = 0$, откуда $g = 0$. ■

Теорема 1.11. *Все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

□ Пусть $\{e_n\}$ — ПОНС. Возьмём вектор h и его коэффициенты Фурье по этой системе — последовательность $\{c_n\} \in \ell_2$. Как мы знаем, в силу теоремы Рисса – Фишера и задачи 1.2, имеется линейная биекция между векторами пространства и наборами коэффициентов Фурье, то есть изоморфизм произвольного гильбертова пространства на пространство ℓ_2. Он сохраняет расстояние (то есть норму разности) в силу равенства Парсеваля. Осталось показать, что сохранение нормы влечёт сохранение скалярного произведения. Для этого достаточно вспомнить факт из линейной алгебры: эрмитова полуторалинейная функция однозначно восстанавливается по своей квадратичной функции. По этому поводу см. [4, гл. 5, §5]. ■

1.2. Спектральная теорема

1.2.1. Лемма об отображении спектра

Лемма 1.12 (Об отображении спектра). *Пусть P — многочлен. Тогда $\Sigma\big(P(A)\big) = P\big(\Sigma(A)\big)$.*

□ Докажем включение «$\supset$». Возьмём $\lambda \in \Sigma(A)$. Рассмотрим $P(z) - P(\lambda) = (z-\lambda)Q(z)$, и подставим $z = A$. Получим $P(A) - P(\lambda)I = (A - \lambda I)Q(A)$. Так как сомножители коммутируют, и оператор $A - \lambda I$ необратим, поэтому необратим и оператор в левой части. Но это и означает, что $P(\lambda) \in \Sigma\big(P(A)\big)$.

Докажем обратное включение «$\subset$». Возьмём $c \in \Sigma\big(P(A)\big)$ и покажем, что $\exists\, \lambda \in \Sigma(A)$, для которого $c = P(\lambda)$. Возьмём $P(z) - c = k(z-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)$, откуда $P(A) - cI = k(A - \lambda_1 I) \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_n I)$. Какой-то из операторов в этом произведении должен быть необратим, иначе был бы обратим и оператор $P(A) - cI$, что неверно. ■

Замечание. Свойство коммутирования тут очень важно. Пример: операторы левого и правого сдвига в ℓ_p. Имеем $LR = E$ (т. е. обратимый оператор), а RL — необратим, так как x_1 погибает при левом сдвиге, т. е. имеется ядро $\langle (1, 0, 0, \ldots) \rangle$.

1.2.2. Спектральный радиус оператора и его оценка сверху

Определение. *Спектральным радиусом* оператора A называется число $r(A) := \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in \Sigma(A)\}$. Это «наименьший» радиус круга, в который умещается спектр оператора.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *полуаддитивной*, если $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ для всех m, n.

Лемма 1.13 (Фекете). *Для полуаддитивных последовательностей имеет место свойство*

$$\lim_n \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}.$$

□ Положим $A := \inf\limits_n \frac{a_n}{n}$. Вообще говоря, может получиться так, что $A = -\infty$. Но это не повлияет на дальнейшие рассуждения. По определению нижней грани найдётся n_ε, для которого $\frac{a_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} - A < \varepsilon$. Рассмотрим произвольное n и поделим с остатком на n_ε: $n = k \cdot n_\varepsilon + r$. Тогда при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{k \cdot a_{n_\varepsilon} + a_r}{k \cdot n_\varepsilon + r} = \frac{a_{n_\varepsilon} + \frac{a_r}{k}}{n_\varepsilon + \frac{r}{k}} \to \frac{a_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_n \frac{a_n}{n}$ существует и равен A. ■

Лемма 1.14 (Оценка спектрального радиуса). *Справедливы соотношения:*

$$r(A) = \lim_n \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

и $r(A) \leqslant \|A\|$, причём для самосопряжённых операторов неравенство обращается в равенство.

□ Рассмотрим $a_n := \ln \|A^n\|$, тогда $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$. По лемме Фекете имеем $\frac{a_n}{n} \to \inf\limits_k \frac{a_k}{k}$, поэтому существует предел $\lim\limits_n \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Положим $s(A) := \lim\limits_n \sqrt[n]{\|A^n\|} = \overline{\lim\limits_n} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Сначала покажем, что $r(A) \leqslant s(A)$. Действительно, при $|\lambda| > s(A)$ степенной ряд для резольвенты

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k} \tag{3}$$

мажорируется по норме в пространстве операторов сходящимся числовым рядом, поэтому имеет место сходимость.

Теперь докажем обратную оценку. Как мы знаем, резольвента аналитична в дополнении к спектру, поэтому в кольце $|\lambda| > r(A)$ она задаётся рядом Лорана (3). По формуле Коши – Адамара получаем, что радиус кольца его сходимости равен $s(A)$. Поэтому верно и обратное неравенство. Таким образом, $r(A) = s(A)$.

Далее, так как $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$, то $\sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant \|A\|$, поэтому $r(A) \leqslant \|A\|$.

Покажем, что для самосопряжённых операторов достигается равенство в этом соотношении. Пусть A — самосопряжённый оператор. Как мы знаем, $\|A^*A\| = \|A\|^2$, поэтому $\left\|A^2\right\| = \|A\|^2$. Следовательно, имеет место равенство $\left\|A^{2^k}\right\| = \|A\|^{2^k}$. В формуле для $s(A)$ перейдём к пределу по подпоследовательности индексов $n = 2^k$, получим требуемое. Но так как сама последовательность сходится, предел подпоследовательности совпадает с обычным пределом. ■

Задача 1.3. *Пусть $M \subset H$ — подмножество гильбертова пространства. Тогда $(M^\perp)^\perp = \mathrm{Cl}\,\langle M\rangle$.*

Утверждение 1.15. *Пусть B — оператор в гильбертовом пространстве. Тогда $(\mathrm{Im}\,B)^\perp = \mathrm{Ker}\,B^*$.*

□ По определению, $\mathrm{Im}\,B = \{Bx \mid x \in H\}$. Если $y \in (\mathrm{Im}\,B)^\perp$, то для $\forall\, x \in H$ имеем $0 = (Bx, y) = (x, B^*y)$. Но это означает, что $B^*y = 0$, поэтому $y \in \mathrm{Ker}\,B^*$. Осталось заметить, что рассуждения обратимы. ■

Утверждение 1.16. *Спектр самосопряжённого оператора веществен.*

□ Пусть $\lambda \notin \mathbb{R}$, тогда $\mathrm{Ker}(A-\lambda I) = 0$, ибо собственные значения самосопряжённого оператора вещественны. В самом деле, если $Ax = \lambda x$, то $\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x,x)$, поэтому $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теперь покажем, что $\mathrm{Im}(A-\lambda I)$ плотен в H. Имеем $\mathrm{Im}(A-\lambda I)^\perp = \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^* = \mathrm{Ker}(A-\overline{\lambda} I) = 0$. Применяя результат задачи к $M = \mathrm{Im}(A-\lambda I)$, получаем, что $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Im}(A-\lambda I) = 0^\perp = H$.

Поскольку $\mathrm{Ker}(A-\lambda I) = 0$, оператор, обратный к $A - \lambda I$, однозначно определён на образе $\mathrm{Im}(A-\lambda I)$. Докажем его ограниченность: пусть $\lambda = a + bi$, где $b \neq 0$. Тогда

$$\|(A-\lambda I)x\|^2 = \big((A-a-bi)x, (A-a-bi)x\big) = \\ = \big((A-a)x - (bi)x, (A-a)x - (bi)x\big) = \|(A-a)x\|^2 + b^2\|x\|^2 \geqslant b^2\|x\|^2,$$

значит, оператор ограничен снизу. Но тогда обратный оператор ограничен сверху. Поскольку образ всюду плотен, оператор можно продолжить по непрерывности на всё пространство, значит, он обратим и $\lambda \notin \Sigma(A)$. ■

1.2.3. Общий вид функционала на пространстве непрерывных функций

Теорема 1.17 (Ф. Рисса). *Всякий ограниченный линейный функционал $f\colon \mathbf{C}[0,1] \to \mathbb{C}$ можно представить интегралом Римана – Стилтьеса по функции $g \in \mathbf{VB}[0,1]$, то есть $f(\varphi) = \int \varphi\, dg$.*

□ Пусть $\mathbf{B}[0,1]$ — пространство ограниченных функций с чебышёвской нормой. Продолжим наш функционал f на пространство $\mathbf{B}$ и обозначим полученное продолжение через F. Положим $g(t) := F\left(\chi_{[0,t)}\right)$, где χ — индикатор. Для краткости аргумент индикаторов писать не будем. Покажем, что $g \in \mathbf{VB}$.

В самом деле, рассмотрим разбиение отрезка $[0,1]$ точками $0 = t_0, \ldots, t_n = 1$. Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left|F\left(\chi_{[0,t_k)}\right) - F\left(\chi_{[0,t_{k-1})}\right)\right| = \sum_{k=1}^n \left[F\left(\chi_{[0,t_k)}\right) - F\left(\chi_{[0,t_{k-1})}\right)\right] e^{i\alpha_k} = \\ = F\left(\sum_{k=1}^n e^{i\alpha_k}\chi_{[t_{k-1},t_k)}\right) \leqslant \|F\| \cdot \left\|\sum_{k=1}^n e^{i\alpha_k}\chi_{[t_{k-1},t_k)}\right\| = \|F\| \cdot 1 = \|F\|.$$

В этих выкладках мы «подкрутили» слагаемые коэффициентами $e^{i\alpha_k}$ так, что каждое комплексное число совпало со своим модулем. Итак, доказано, что $g \in \mathbf{VB}$.

Теперь рассмотрим $\varphi \in \mathbf{C}[0,1]$ и приблизим её ступенчатыми функциями:

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \chi_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)} = \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left(\chi_{\left[0, \frac{k}{n}\right)} - \chi_{\left[0, \frac{k-1}{n}\right)}\right).$$

Тогда $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ и потому $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$. Вспоминая определение интеграла Римана – Стилтьеса, получаем

$$F(\varphi_n) = \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] \to \int_0^1 \varphi(t)\, dg(t),$$

что и требовалось доказать. ■

Определение. Назовём *ε-индикатором* отрезка $[\alpha, \beta]$ непрерывную функцию, равную нулю вне отрезка, равную единице на отрезке $[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$ и доопределённую линейным образом на интервалах $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$ и $(\beta-\varepsilon, \beta)$.

Следующее утверждение является некоторым дополнением к теореме Рисса об общем виде функционалов на $\mathbf{C}[a,b]$.

Утверждение 1.18. *Пусть $f(\varphi) := \int \varphi\, dg$ — функционал на $\mathbf{C}[a,b]$. Если он вещественный, то функцию g можно выбрать вещественной, а если он неотрицателен, то g можно взять неубывающей.*

$\square$ Пусть g не является вещественнозначной функцией. Тогда найдётся интервал (α,β), на котором $g(\beta) - g(\alpha) \notin \mathbb{R}$. Возьмём ε-индикатор отрезка $\alpha,\beta)$, На такой функции значение нашего функционала, то есть попросту интеграла, не будет вещественным.

Пусть теперь функционал неотрицателен. Допустим, что g убывает на каком-нибудь отрезке $[\alpha,\beta]$. Тогда интеграл от ε-индикатора этого отрезка будет отрицательным. $\blacksquare$

1.2.4. Доказательство спектральной теоремы

Напомним, что $L_2(\sigma)$ — пространство L_2 интегрируемых в квадрате функций по некоторой мере σ.

Определение. Говорят, что оператор A имеет *циклический вектор*, если $\exists\, h \in H$, для которого линейная оболочка $\langle A^n h \mid n \in \mathbb{Z}_+\rangle$ всюду плотна в H.

Лемма 1.19. *Пусть A — самосопряжённый оператор. Тогда $\|P(A)\| \leqslant \|P\|_C$, где $\|\cdot\|_C$ — чебышёвская норма на пространстве $\mathbf{C}\left[-\|A\|,\|A\|\right]$.*

$\square$ В силу фундаментального равенства имеем

$$\|P(A)\|^2 = \|P^*(A)P(A)\| = \left\|\overline{P}P(A)\right\| = \sup\bigl\{|\lambda|\colon \lambda \in \Sigma\left(\overline{P}P(A)\right)\bigr\} = \sup\bigl\{|P(\lambda)|^2 : \lambda \in \Sigma(A)\bigr\}.$$

Далее, поскольку $\lambda \in \mathbb{R}$, можно брать верхнюю грань только по отрезку $[-\|A\|,\|A\|]$ вещественной оси. Значит,

$$\|P(A)\|^2 \leqslant \sup\left\{|P(\lambda)|^2 : \lambda \in [-\|A\|,\|A\|]\right\},$$

а это и есть определение чебышёвской нормы. $\blacksquare$

Теорема 1.20 (Спектральная теорема). *Пусть самосопряжённый оператор $A\colon H \to H$ имеет циклический вектор $h \in H$. Тогда существует мера σ на отрезке $[-\|A\|,\|A\|]$ и изометрическое отображение $U\colon H \to L_2(\sigma)$, для которого UAU^{-1} есть оператор умножения на независимую переменную: $f(\lambda) \mapsto \lambda f(\lambda)$.*

$\square$ Сначала докажем, что это верно для многочленов. Пусть P — многочлен. Рассмотрим функционал $\alpha(P) := \bigl(P(A)h, h\bigr)$. Он линейный, неотрицательный и ограниченный.

Покажем, что если $f \geqslant 0$, то $\alpha(f) \geqslant 0$. Рассмотрим $g = \sqrt{f}$, тогда $\alpha(f) = \bigl(g^2(A)h, h\bigr) = \bigl(g(A)h, g(A)h\bigr) = \|g(A)h\|^2 \geqslant 0$. Здесь мы воспользовались тем, что $\bigl(g(A)\bigr)^* = g(A)$. Для многочленов это верно, а для функций — в силу непрерывности.

По теореме Рисса функционал α имеет представление $\alpha(P) = \int P\, d\sigma$, где σ — мера на $X := [-\|A\|,\|A\|]$. Построим, наконец, отображение U: положим $U\bigl(P(A)h\bigr) := P$. Покажем, что это отображение корректно задано, то есть покажем, что если $P(A) = Q(A)$, то $P \overset{\text{п.в.}}{=} Q$ по мере σ. Имеем

$$0 = \left\|\bigl(P(A) - Q(A)\bigr)h\right\|^2 = \|(P-Q)(A)h\|^2 = \bigl((P-Q)(A)h, (P-Q)(A)h\bigr) = \\ = \bigl(|P-Q|^2(A)h, h\bigr) = \alpha\bigl(|P-Q|^2\bigr) = \int |P-Q|^2\, d\sigma = \|P-Q\|_{L_2(\sigma)}.$$

Тем самым проверена не только корректность, но и изометричность отображения U, а также и то, что обратное отображение U^{-1} существует.

Рассмотрим действие на векторах $P(A)h$: имеем $(UAU^{-1}P)(\lambda) = \bigl(UAP(A)h\bigr)(\lambda) = \lambda P(\lambda)$ по определению отображения U. В общем случае, приблизим функцию из $L_2(\sigma)$ многочленами $\{P_n\}$, тогда получим

$$\left(UAU^{-1}P_n\right)(\lambda) = \lambda P_n(\lambda) \xrightarrow{\text{п.в.}} \lambda f(\lambda) = \left(UAU^{-1}\right) f(\lambda).$$

Это и завершает доказательство спектральной теоремы. $\blacksquare$

2. Компактные операторы

2.1. Компактные операторы в банаховых пространствах

2.1.1. Определение и свойства компактных операторов

Определение. Оператор называется *компактным*, если образ единичного шара предкомпактен.

Утверждение 2.1. *Сумма компактных операторов есть снова компактный оператор.*

$\square$ Очевидно, если воспользоваться, например, критерием Хаусдорфа. $\blacksquare$

Утверждение 2.2. *Произведение компактного и ограниченного операторов есть компактный оператор.*

$\square$ Пусть A — компактный, а B — ограниченный операторы. Сначала покажем, что оператор AB компактен. Если множество M ограничено, то $B(M)$ тоже ограничено. Тогда $A\big(B(M)\big)$ предкомпактно, и всё доказано.

Теперь покажем, что BA тоже компактный оператор. Для этого воспользуемся критерием Хаусдорфа предкомпактности множества. В силу компактности A, для любого ε в множестве $A(M)$ существует конечная ε-сеть. Очевидно, что для множества $B\big(A(M)\big)$ годится $\|B\| \cdot \varepsilon$-сеть, которая получается из исходной сети после применения оператора B. $\blacksquare$

Утверждение 2.3. *Ограниченный оператор с конечномерным образом компактен.*

$\square$ Действительно, всякое бесконечное ограниченное множество в конечномерном пространстве предкомпактно. Следовательно, из образа любой ограниченной последовательности можно будет выделить фундаментальную. $\blacksquare$

Следствие 2.1. *Компактный оператор в бесконечномерном пространстве необратим.*

$\square$ В самом деле, допустим противное. Поскольку $AA^{-1} = \mathrm{id}$, в силу предыдущего утверждения получаем, что id является компактным оператором. Но это неверно, поскольку в бесконечномерном пространстве единичный шар не является предкомпактом. $\blacksquare$

Теорема 2.4. *Пусть A_n — последовательность компактных операторов в банаховом пространстве, и $A_n \to A$ по норме. Тогда A компактен.*

$\square$ Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Нужно доказать, что из последовательности $\{Ax_n\}$ можно выбрать фундаментальную.

Так как A_1 компактен, то выбираем последовательность $x_n^{(1)}$ такую, что последовательность $A_1 x_n^{(1)}$ сходится. Из неё выбираем $x_n^{(2)}$ такую, что $A_2 x_n^{(2)}$ сходится, и так далее. Возьмём диагональ $y_i := x_i^{(i)}$ и покажем, что последовательность Ay_i фундаментальна. По условию $\|x_n\| \leqslant C$, а $\|A_k y_n - A_k y_m\| \to 0$ в силу фундаментальности. Кроме того, $\|A - A_k\| \to 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\|Ay_n - Ay_m\| &\leqslant \|Ay_n - A_k y_n\| + \|A_k y_n - A_k y_m\| + \|A_k y_m - Ay_m\| \leqslant \\ &\leqslant \|A - A_k\| \cdot \|y_n\| + \|A_k y_n - A_k y_m\| + \|A - A_k\| \cdot \|y_m\| \leqslant \\ &\leqslant \|A - A_k\| \cdot C + \|A_k y_n - A_k y_m\| + \|A - A_k\| \cdot C \to 0,\end{aligned}$$

а это и значит, что последовательность $\{Ay_i\}$ фундаментальна. $\blacksquare$

Лемма 2.5. *Собственные векторы с различными собственными значениями линейно независимы.*

$\square$ Докажем утверждение индукцией по количеству k собственных векторов $e_1, \ldots, e_k$ с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ соответственно. При $k = 1$ доказывать нечего. Пусть $k > 1$, и

$$e_1 + \ldots + e_{k-1} + e_k = 0,$$

тогда, применяя к этому равенству оператор, получаем

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_k e_k = 0.$$

Вычтем отсюда исходное равенство, умноженное на λ_k, получим

$$(\lambda_1 - \lambda_k) e_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) e_{k-1} = 0.$$

По предположению индукции такое возможно только если $e_i = 0$ при $i = 1, \ldots, k-1$. Но тогда и $e_k = 0$. $\blacksquare$

Теорема 2.6. *Пусть оператор $A\colon X \to X$ — компактен, пространство X — банахово. Тогда количество собственных значений вне всякого круга радиуса $r > 0$ с центром в нуле лишь конечное число.*

$\square$ Пусть $\{\lambda_n\}$ — попарно различные ненулевые собственные значения оператора A. Покажем, что $\lambda_n \to 0$. Допустим противное, тогда из $\{\lambda_n\}$ можно выделить подпоследовательность так, что после перенумерации последовательность $\left\{\frac{1}{|\lambda_n|}\right\}$ ограничена. Рассмотрим цепочку подпространств $X_n := \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, где e_i — собственный вектор с собственным значением λ_i. Тогда $e_1, \ldots, e_n$ будут линейно независимыми, следовательно, $\{X_n\}$ — строго возрастающая цепочка. В силу леммы о почти перпендикуляре, найдутся единичные векторы $x_n \in X_n$, для которых $\rho\,(x_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}$. Разложим их по базису подпространств X_n: пусть $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Как легко видеть, $\frac{Ax_n}{\lambda_n} - x_n \in X_{n-1}$. По предположению, последовательность $\left\{\frac{x_n}{\lambda_n}\right\}$ ограничена. Подействуем на неё оператором A и увидим, что получается ёж. В самом деле, при $n < m$ имеем

$$v := \frac{Ax_n}{\lambda_n} - \frac{Ax_m}{\lambda_m} = \underbrace{\frac{Ax_n}{\lambda_n}}_{\in X_{m-1}} - x_m + \underbrace{x_m - \frac{Ax_m}{\lambda_m}}_{\in X_{m-1}},$$

значит, $\|v\| = \|-x_m + (\text{вектор из } X_{m-1})\| \geqslant \frac{1}{2}$, а это противоречит компактности оператора A. ■

2.1.2. Слабая сходимость и слабая компактность

Пусть X — нормированное пространство.

Определение. Говорят, что последовательность x_n *слабо сходится* к x, если для любого ограниченного функционала f на X имеем $f(x_n) \to f(x)$. Обозначение: $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$.

Определение. Говорят, что последовательность функционалов f_n *слабо сходится* к f, если для любого вектора $x \in X$ имеем $f_n(x) \to f(x)$. Обозначение: $f_n \xrightarrow{\text{w}} f$.

Определение. Говорят, что последовательность x_n *слабо ограничена*, если для любого ограниченного функционала f на X имеем $|f(x_n)| \leqslant C(f)$.

Лемма 2.7. *Существует изометричное вложение $X \hookrightarrow X^{**}$.*

□ Зададим вложение так: $x \mapsto F_x$, где $F_x \in X^{**}$ — функционал на X^*, действующий на элементах $f \in X^*$ следующим образом:

$$F_x \colon f \mapsto f(x).$$

Это вложение, очевидно, линейно. Докажем, что это изометрия. Обозначим норму в X^{**} через $\|\cdot\|_2$. С одной стороны, по определению нормы имеем $|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$, поэтому

$$\|x\| \geqslant \sup_f \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|_2 .$$

С другой стороны, в силу одного из следствий теоремы Хана – Банаха, для всякого $x_0 \in X$ найдётся функционал f_0 такой, что $|f_0(x_0)| = \|f_0\| \cdot \|x_0\|$, поэтому

$$\|x\|_2 = \sup_f \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqslant \|x\| ,$$

следовательно, $\|x\| = \|x\|_2$. ■

Утверждение 2.8. *Слабо ограниченная последовательность ограничена по норме.*

□ Применим теорему Банаха – Штейнгауза к пространствам X^* и X^{**}, то есть вместо последовательности $\{x_i\}$ рассматривая её образ в X^{**}. В силу этой теоремы семейство образов будет ограниченным, но в силу изометричности вложения этим свойством будет обладать и исходное семейство векторов. ■

Примечание: Если это рассуждение непонятно, то можно в лоб доказать аналог ТБШ. Впрочем, в конце рассуждение о вложении $X \hookrightarrow X^{**}$ придётся повторить. Доказательство можно найти в приложении 5.3.3.

Утверждение 2.9. *Из слабой сходимости следует слабая ограниченность.*

□ Пусть $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$. Это означает, что для каждого f найдется N такое, что при всех $n > N$ имеем $|f(x_n) - f(x)| \leqslant 1$. Но остальных n лишь конечное число, поэтому для каждого f последовательность $\{f(x_n)\}$ ограничена. ■

Теорема 2.10 (О слабой компактности). *Пусть X — сепарабельное нормированное пространство. Тогда всякое ограниченное бесконечное подмножество в X^* является слабо предкомпактным.*

□ Выберем в X счётное всюду плотное множество $D := \{x_n\}$. Пусть $\{f_n\}$ — ограниченная последовательность функционалов. Рассмотрим последовательность чисел $\{f_n(x_1)\}$. Она ограничена, а потому содержит сходящуюся. Обозначим её через $f_n^{(1)}(x_1)$. Рассмотрим последовательность чисел $\left\{f_n^{(1)}(x_2)\right\}$. Она тоже содержит сходящуюся подпоследовательность $f_n^{(2)}(x_2)$. Продолжая этот процесс и выделяя диагональ $\varphi_n := f_n^{(n)}$, получаем последовательность функционалов, которая сходится на всех векторах x_i.

Покажем, что сходимость имеет место для всех векторов $x \in X$. Покажем фундаментальность последовательности $\{\varphi_i(x)\}$. Рассмотрим последовательность элементов из D, сходящуюся к x, тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| = |\varphi_m(x) - \varphi_m(x_k) + \varphi_m(x_k) - \varphi_n(x_k) + \varphi_n(x_k) - \varphi_n(x)| \leqslant \\ \leqslant |\varphi_m(x) - \varphi_m(x_k)| + |\varphi_m(x_k) - \varphi_n(x_k)| + |\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x)| \to 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Следствие 2.2. *Пусть $D \subset X$ — счётное всюду плотное множество. Пусть для каждого $x \in D$ последовательность $f_k(x)$ сходится. Тогда существует функционал f такой, что $f_k \xrightarrow{\text{w}} f$.*

Утверждение 2.11. *Слабый предел единствен.*

□ Допустим, что $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$ и $x_n \xrightarrow{\text{w}} y$, причём $x \neq y$. Тогда, по определению слабой сходимости, для любого f имеем $f(x_n) \to f(x)$ и $f(x_n) \to f(y)$. Следовательно, для всякого функционала f имеем $f(x) = f(y)$, то есть $f(x-y)=0$. Но по лемме о продолжении функционала существует f, который равен 1 на векторе $x-y$. Противоречие. ■

Лемма 2.12. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ в банаховом пространстве слабо сходится к x_0 и предкомпактна. Тогда $x_n \to x_0$ по норме пространства.*

□ В силу предкомпактности из последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность x_{n_k}. В силу полноты пространства она сходится к некоторому вектору $\widehat{x}$. Из сходимости по норме очевидно следует слабая сходимость, поэтому $x_{n_k} \xrightarrow{\mathrm{w}} \widehat{x}$. Но слабый предел единствен, поэтому $\widehat{x}=x_0$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 2.3. *Компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сходящуюся по норме.*

□ Как уже было доказано, слабо сходящаяся последовательность ограничена. По определению компактного оператора, $\{Ax_n\}$ предкомпактно, поэтому содержит сходящуюся к некоторой точке y подпоследовательность. Очевидно, что $\{Ax_n\}$ тоже слабо сходится, а поскольку слабый предел совпадает с сильным (если последний существует), то и образ всей последовательности сходится к y. ■

2.1.3. Классификация точек спектра

Пусть $A\colon X \to X$ — ограниченный оператор в банаховом пространстве. Расклассифицируем точки $\lambda \in \mathbb{C}$ для оператора $A-\lambda I$, причём здесь мы будем придерживаться классификации, используемой в книге Глазмана.

- Пусть $\operatorname{Ker}(A-\lambda I) \neq 0$, но это ядро конечномерно. Тогда λ — собственные значения конечной кратности. В этом случае, разумеется, $A-\lambda I$ необратим (даже в алгебраическом смысле). Множество таких точек обозначим через $\Sigma_p(A)$ и назовём *точечным спектром.*
- Пусть $\operatorname{Im}(A-\lambda I) \neq X$. Тогда возможно 2 случая:

  a) $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)=0$ и $\operatorname{Cl}\operatorname{Im}(A-\lambda I) \neq \operatorname{Im}(A-\lambda I)$;
  b) λ — собственное значение бесконечной кратности, то есть $\dim\operatorname{Ker}(A-\lambda I)=\infty$.

  Такие точки λ называются точками *непрерывного спектра.* Обозначим его через $\Sigma_c(A)$.
- Пусть $\operatorname{Im}(A-\lambda I) \neq X$ и замкнут. [Ещё какой-то спектр]
- $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)=0$ и $\operatorname{Im}(A-\lambda I)=X$. Тогда в силу теоремы Банаха, существует ограниченный обратный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$. В этом случае говорят, что λ — точка *резольвентного множества.*

2.1.4. Сохранение непрерывного спектра при компактном возмущении

В этом разделе X — сепарабельное гильбертово пространство, а $A\colon X \to X$ — ограниченный оператор.

Лемма 2.13. *Положим $B := A-\lambda I$. Пусть λ — точка непрерывного спектра, причём $\operatorname{Ker} B=0$. Положим $Y := \operatorname{Im} B$. Тогда отображение $C\colon Y \to X$ является неограниченным оператором.*

□ По условию Y не является замкнутым подпространством, поэтому оно не может быть полным. Допустим, что C — ограниченный оператор. Возьмём фундаментальную последовательность $\{y_n\} \subset Y$. Положим $x_n := Cy_n$, тогда, очевидно, $\{x_n\}$ — тоже фундаментальна. В силу полноты X она сходится к некоторому вектору $x \in X$. Поскольку B ограничен и потому непрерывен, получаем $Bx_n \to Bx$. Но $Bx_n = y_n$, а $Ax \in Y$. Значит, $y_n \to y$. Тем самым показано, что Y полное пространство. Противоречие, значит, оператор C не является ограниченным. ■

Лемма 2.14. *Положим $B := A-\lambda I$. Если $\lambda \in \Sigma_c(A)$, то существует непредкомпактная последовательность $x_n \in X$ такая, что $\|x_n\|=1$ и $Bx_n \to 0$.*

□ Пусть $\lambda \in \Sigma_c(A)$. Точки непрерывного спектра бывают двух видов, и придётся разобрать два случая.

Пусть сначала $\dim\operatorname{Ker} B=\infty$. Так как единичная сфера в бесконечномерном пространстве не является предкомпактом, можно выбрать непредкомпактную последовательность $\{x_n\} \subset \operatorname{Ker} B$. Но в этом случае $Bx_n=0$, поэтому всё доказано.

Во втором случае применим только что доказанную лемму, которая говорит, что оператор $C := B^{-1}$, (определённый, впрочем, только на $\operatorname{Im} B$) является неограниченным. Тогда, как несложно видеть, существует последовательность $\{y_n\} \subset \operatorname{Im} B$, для которой $\|y_n\|=1$ и $\|Cy_n\| \geqslant n$, поэтому, положив

$$x_n := \frac{Cy_n}{\|Cy_n\|},$$

получаем искомую последовательность, ибо $\|Bx_n\| \leqslant \frac{1}{n}$.

Осталось показать, что полученная последовательность непредкомпактна. Допустим противное, тогда из неё можно выделить фундаментальную подпоследовательность, которая в силу полноты пространства сходится к некоторому вектору $x \in X$. Перенумеруем её, тогда $x_n \to x$. В силу непрерывности B имеем $Bx_n \to Bx$, с другой стороны, $Bx_n \to 0$. Таким образом, $Bx=0$. Но поскольку $\operatorname{Ker} B=0$, то и $x=0$, с другой стороны, $\|x_n\|=1$ и $x_n \to x$, поэтому $\|x\|=1$. Противоречие. ■

При данном определении непрерывного спектра обратное утверждение леммы неверно, поэтому далее в этом разделе будет использовано такое определение непрерывного спектра:

Определение. Положим $B := A-\lambda I$. Точка $\lambda \in \Sigma_c(A)$ тогда и только тогда, когда существует непредкомпактная последовательность $x_n \in X$ такая, что $\|x_n\|=1$ и $Bx_n \to 0$.

Определение. Множество векторов $\{x_n\}$ называется *ε-ежом*, если для $\forall\, n, m$ имеем $\|x_n - x_m\| \geqslant \varepsilon$.

Теорема 2.15. *Пусть $A\colon X \to X$ — ограниченный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве X, а $K\colon X \to X$ — компактный оператор. Тогда $\Sigma_c(A+K) = \Sigma_c(A)$.*

□ Пусть $\lambda \in \Sigma_c(A)$. Положим $B := A - \lambda I$. По лемме[1] существует непредкомпактная последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $Bx_n \to 0$. Из доказательства критерия Хаусдорфа следует, что найдётся подпоследовательность $\{y_n\} \subset \{x_n\}$, образующая ε-ежа. Поскольку $\{y_n\}$ ограничена, по теореме о слабой компактности[2], из y_n можно выделить слабо сходящуюся последовательность $\{z_n\}$.

Покажем, что последовательность $\{z_n - z_{n+1}\}$ будет непредкомпактной. Действительно, допустим, что из неё можно выбрать фундаментальную. Тогда в силу полноты пространства получаем

$$\Delta z_k := \big(z_{n_k+1} - z_{n_k}\big) \to z \in X.$$

Пусть f — произвольный ограниченный функционал. В силу слабой сходимости имеем

$$f(\Delta z_k) = f(z_{n_k+1}) - f(z_{n_k}) \to 0,$$

поскольку каждое слагаемое сходится к одному и тому же числу. Таким образом, $\Delta z_k \xrightarrow{\text{w}} 0$. Но у этой последовательности существует и сильный предел z, поэтому $z = 0$, то есть $z_{n_k+1} - z_{n_k} \to 0$. Но это противоречит тому, что последовательность $\{z_n\}$ является ε-ежом.

Осталось показать, что $(B+K)(z_n - z_{n+1}) \to 0$. В самом деле, имеем

$$(B+K)(z_n - z_{n+1}) = Bz_n - Bz_{n+1} + Kz_n - Kz_{n+1}.$$

Первые два слагаемых идут к нулю в силу выбора $\{z_n\}$, а вторые два сходятся к одному и тому же вектору, поскольку слабо сходящаяся последовательность $\{z_n\}$ перерабатывается компактным оператором K в сходящуюся по норме. Применяя лемму в обратную сторону, получаем, что $\lambda \in \Sigma_c(B+K)$. ■

2.2. Компактные операторы в гильбертовых пространствах

2.2.1. Теорема Гильберта – Шмидта

В этом разделе A — компактный самосопряжённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Введём обозначение $Q(x) := (Ax, x)$. Заметим, что это число всегда вещественно в силу самосопряжённости оператора.

Лемма 2.16. *Пусть $x_n \xrightarrow{\text{w}} x$. Тогда $Q(x_n) \to Q(x)$.*

□ Имеем

$$\begin{aligned}|Q(x_n) - Q(x)| = |(Ax_n, x_n) - (Ax, x)| = |(Ax_n, x_n) - (Ax, x_n) + (Ax, x_n) - (Ax, x)| \leqslant \\ \leqslant |(Ax_n, x_n) - (Ax, x_n)| + |(Ax, x_n) - (Ax, x)| \overset{!}{=} \big|\big(A(x_n - x), x_n\big)\big| + \big|\big(x, A(x_n - x)\big)\big| \leqslant \\ \leqslant \|A(x_n - x)\| \cdot \|x_n\| + \|x\| \cdot \|A(x_n - x)\| \to 0.\end{aligned}$$

Здесь равенство «!» следует из свойств самосопряжённого оператора, а сходимость к нулю вытекает из свойств компактных операторов и ограниченности $\|x_n\|$ (а это — следствие слабой сходимости). ■

Лемма 2.17. *Если $|Q(x)|$ достигает на единичной сфере своего максимума в точке x_0, то для любого вектора y такого, что $(x_0, y) = 0$, выполнено $(Ax_0, y) = 0$, то есть $\langle x_0\rangle^\perp \subset \langle Ax_0\rangle^\perp$.*

□ Рассмотрим вектор

$$v := \frac{x_0 + ay}{\|x_0 + ay\|}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Используя самосопряжённость оператора и теорему Пифагора для векторов x_0 и y, получаем

$$Q(v) = \frac{1}{1 + |a|^2 \cdot \|y\|^2} \cdot \big(Q(x_0) + 2\operatorname{Re}\big(\overline{a}(Ax_0, y)\big) + |a|^2\, Q(y)\big).$$

Если $(Ax_0, y) \neq 0$, то выбирая a малым по модулю и подкручивая его аргумент, можно сделать так, что число $\operatorname{Re}\big(\overline{a}(Ax_0, y)\big)$ будет ненулевым вещественным и будет иметь тот же знак, что и $Q(x_0)$. Тогда $|Q(v)| > |Q(x_0)|$, а мы предположили, что x_0 максимизирует модуль Q. Полученное противоречие показывает, что $(Ax_0, y) = 0$. ■

[1] То есть по новому определению

[2] Мы доказывали её для сопряжённого пространства. Но в случае гильбертовых пространств мы пользуемся антиизоморфизмом H и H^*, и потому шар в гильбертовом пространстве слабо компактен. Заметим, что именно здесь используется сепарабельность.

Следствие 2.4. *Если $|Q(x)|$ достиг максимума на векторе x_0, то это собственный вектор оператора A.*

□ По лемме имеем $\langle x_0\rangle^\perp \subset \langle Ax_0\rangle^\perp$, поэтому $\left(\langle x_0\rangle^\perp\right)^\perp \supset \left(\langle Ax_0\rangle^\perp\right)^\perp$, то есть $\langle Ax_0\rangle \subset \langle x_0\rangle$. ■

Теорема 2.18 (Гильберта – Шмидта). *Компактный самосопряжённый оператор A в сепарабельном гильбертовом пространстве H обладает базисом из собственных векторов.*

□ Будем строить элементы базиса по индукции в порядке убывания модулей собственных значений. Покажем, что на единичной сфере функция $|Q(x)|$ достигает своего максимума. Пусть $S := \sup|Q(x)|$, а x_n — последовательность единичных векторов, реализующая S. Поскольку единичный шар слабо предкомпактен, можно выбрать подпоследовательность $y_n \xrightarrow{\mathrm{w}} y$. При этом в силу первой леммы получаем $|Q(y_n)| \to |Q(y)|$, поэтому $|Q(y)| = S$.

В качестве первого базисного вектора e_1 возьмём вектор y. Теперь рассмотрим подпространство $\langle e_1\rangle^\perp$. Оно в силу самосопряжённости оператора инвариантно относительно A. В нём повторим эту же процедуру, найдём e_2, и так далее. Если начиная с какого-то момента мы получаем $Q(x) \equiv 0$, это означает, что ненулевые собственные значения кончились, и мы попали в ядро оператора. Во противном случае получаем последовательность ненулевых собственных значений $\{\lambda_n\}$. Они, очевидно, сходятся к нулю. В самом деле, если бы их модули были ограничены снизу, то образы единичных базисных векторов образовывали бы ежа, а не предкомпактное множество.

Таким образом, мы представили произвольный вектор $x \in H$ в виде

$$x = \sum c_i e_i + z, \tag{1}$$

где $z \in \operatorname{Ker} A$, причём оператор действует диагонально: $Ax = \sum \lambda_i c_i e_i$. ■

Следствие 2.5 (Об общем виде компактного оператора в гильбертовом пространстве). *Для всякого компактного оператора $A\colon H \to H$ существуют ОНС $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$, такие, что ряд*

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, \psi_k)\varphi_k$$

сходится по норме.

□ Рассмотрим оператор A^*A. Он будет самосопряжённым и компактным, поскольку является произведением компактного и ограниченного. По предыдущей теореме, существует ортонормированная система $\{\psi_k\}$, в которой $A^*A\psi_k = \mu_k\psi_k$. Легко видеть, что $\mu_k > 0$. Положим $\lambda_k := \sqrt{\mu_k}$ и рассмотрим $\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k}A\psi_k$. Можно считать, что μ_k были упорядочены по убыванию. Осталось проверить, что для произвольного вектора x имеет место разложение

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, \psi_k)\varphi_k.$$

В самом деле, имеем

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, \psi_k)\psi_k + x_0, \quad x_0 \in \operatorname{Ker} A^*A.$$

Покажем, что $Ax_0 = 0$. В самом деле, если $A^*Ax_0 = 0$, то $(A^*Ax_0, x_0) = 0$, а это эквивалентно $(Ax_0, Ax_0) = 0$, значит, $Ax_0 = 0$.

Следовательно,

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, \psi_k)\frac{A\psi_k}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, \psi_k)\varphi_k,$$

что и требуется. Теперь нужно проверить ортонормированность системы $\{\varphi_k\}$. Имеем

$$(\varphi_k, \varphi_k) = \left(\frac{A\psi_k}{\lambda_k}, \frac{A\psi_k}{\lambda_k}\right) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left(A^*A\psi_k, \psi_k\right) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left(\lambda_k^2\psi_k, \psi_k\right) = 1.$$

■

Далее приводим доказательство Стёпина. Не факт, что оно правильное, а вот приведённое выше доказательство является абсолютно строгим.

Определение. *Мера Дирака δ_p* — это мера, сосредоточенная в одной точке $p \in X$. Она обозначается δ_p и определяется так:

$$\delta_p(A) := \begin{cases} 1, & p \in A; \\ 0, & p \notin A. \end{cases}$$

Можно рассмотреть новую меру, которая есть линейная комбинация дираковских мер:

$$\sigma(A) = \sum \lambda_i \delta_{p_i}(A).$$

Замечание. Пусть σ — мера на отрезке $[a, b]$. Пространство $L_2(\sigma)$ конечномерно тогда и только тогда, когда σ-линейная комбинация дираковских мер.

Теорема 2.19 (Гильберта). *Для компактного самосопряжённого оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов.*

□ В силу спектральной теоремы, оператор A может быть реализован как умножение на независимую переменную: $A\colon f(\lambda) \mapsto \lambda f(\lambda)$. Нам хочется рассмотреть оператор, обратный к A, но этому препятствует деление на λ. Откусим от нуля окрестность U, тогда на множестве $K = [-\|A\|, \|A\|] \setminus U(0)$ оператор A обратим: $A^{-1}\colon f(\lambda) \mapsto \frac{1}{\lambda} f(\lambda)$. Но в силу замечания перед доказательством теоремы, в бесконечномерном пространстве не бывает обратимых компактных операторов. Значит, $L_2(\sigma)$ конечномерно на K, поэтому на всём отрезке $[-\|A\|, \|A\|]$ может быть не более чем счётное число атомов меры σ, причём им разрешено сгущаться только в окрестности $\lambda = 0$. Ясно [?], что δ-функции будут собственными. Так как спектр замкнут, то если оператор имеет счётное множество точек в спектре, то и ноль принадлежит спектру.

Если пространство сепарабельно, то можно рассмотреть и общий случай, когда циклического вектора не существует. Пусть $\{f_n\}$ — счётное всюду плотное множество в H. В этом случае будем рассматривать циклические подпространства, порождённые векторами f_n. Берём первый вектор f_1 и рассматриваем $\langle f_1 \rangle$, для которого проходит наша процедура. Затем берём ортогональное дополнение к $\langle f_1 \rangle$, в нём выбираем ещё один вектор, и так далее... В итоге получим прямую сумму $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \langle f_{n_k} \rangle$. ■

2.2.2. Интегральные операторы Гильберта – Шмидта

Определение. Рассмотрим функцию $K(x, y) \in L_2[a, b]^2$ и оператор $A\colon L_2[a, b] \to L_2[a, b]$, заданный так:

$$A(f) := \int\limits_a^b K(x, y) f(y)\, dy.$$

Этот оператор называется *интегральным оператором Гильберта – Шмидта*. Функция K называется *ядром* интегрального оператора. Через A_K мы будем обозначать оператор с ядром K.

Задача 2.1. *Доказать, что* $A_K^* = A_{\overline{K}}$.

Определение. *Свёртка* двух ядер K и L — это ядро

$$(K * L)(x, z) := \int\limits_a^b K(x, y) L(y, z)\, dy.$$

Задача 2.2. *Докажите, что* $A_K A_L = A_{K*L}$.

Для сокращения записи не будем писать пределы интегрирования по $[a, b]$. Все нормы для функций понимаются в смысле тех пространств, где эти функции живут.

Утверждение 2.20. *Интегральный оператор A с ядром K ограничен.*

□ По теореме Фубини интеграл $\int K(x, y) f(y)\, dy$ существует. По неравенству Коши – Буняковского

$$\left| \int K(x, y) f(y)\, dy \right|^2 \leqslant \int |K(x, y)|^2\, dy \cdot \int |f(y)|^2\, dy.$$

Это неравенство можно проинтегрировать по x, поскольку интеграл в правой части существует. Получим

$$\|Af\|^2 = \int dx \left| \int K(x, y) f(y)\, dy \right|^2 \leqslant \int dx \int |K|^2\, dy \cdot \int |f|^2\, dy = \|K\|^2 \cdot \|f\|^2.$$

■

Следующая теорема на лекциях не формулировалась, однако будет использоваться при доказательстве компактности операторов Гильберта – Шмидта. Доказательство этой теоремы можно найти в [2, гл.VII, § 3, п. 5].

Теорема 2.21. *Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортогональная система в $L_2[a, b]$. Тогда всевозможные произведения $\{\varphi_n(x) \cdot \varphi_m(y)\}$ образуют полную ортогональную систему в $L_2[a, b]^2$.*

Теорема 2.22. *Интегральный оператор Гильберта – Шмидта A с ядром K компактен.*

□ Разложим ядро K нашего оператора по базису пространства $L_2[a, b]^2$:

$$K(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \varphi_m(x) \varphi_n(y).$$

Положим

$$K_N(x,y)=\sum_{m,n=1}^{N}c_{mn}\varphi_m(x)\varphi_n(y).$$

Покажем, что оператор A_N с ядром K_N имеет конечномерный образ. В самом деле,

$$A_Nf=\int K_N(x,y)f(y)\,dy=\sum_{m,n=1}^{N}c_{mn}\varphi_m(x)\int f(y)\varphi_n(y)\,dy.$$

то есть образ любой функции f есть конечная линейная комбинация функций $\varphi_m(x)$.

Осталось заметить, что $\|A_N-A\|\to 0$, так как $\|K_N-K\|\to 0$ в силу того, что это частичные суммы ряда Фурье, а $\|A\|\leqslant\|K\|$, как следует из доказанного выше утверждения. Значит, оператор A является пределом конечномерных (а значит, компактных) операторов и потому сам компактен. ■

3. Метрические и топологические пространства

3.1. Топологические пространства. Компактность

3.1.1. Понятие топологии. Открытые и замкнутые множества

Определение. Говорят, что в множестве X определена *топология*, если в X отмечен класс подмножеств $\tau:=\{U_\alpha\subset X\}$ со следующими свойствами:

- $\varnothing\in\tau$ и $X\in\tau$.
- Если $\{U_1,\ldots,U_n\}\subset\tau$, то и $\bigcap U_i\in\tau$.
- Если $\{U_\beta\}\subset\tau$, то и $\bigcup U_\beta\in\tau$.

Пару (X,τ) называют *топологическим пространством*. Множества из τ называются *открытыми*.

Определение. *База* топологии τ — такая подсистема открытых множеств $\mathcal{B}\subset\tau$, что всякое открытое множество представимо в виде объединения элементов из $\mathcal{B}$. Эквивалентная формулировка: совокупность $\mathcal{B}$ есть база, если для всякого открытого множества U и всякой точки $x\in U$ найдётся $V\in\mathcal{B}$, для которого $x\in V\subset U$. Говорят, что топология обладает *счётной базой*, если существует такая база $\mathcal{B}\subset\tau$, что $\operatorname{Card}\mathcal{B}\leqslant\aleph_0$.

Определение. Множество называется *замкнутым*, если дополнение к нему открыто.

Определение. *Окрестностью* U точки $x\in X$ называется произвольное открытое множество, содержащее эту точку.

Определение. Точка $x\in X$ называется *предельной* точкой множества $M\subset X$, если всякая проколотая окрестность точки x содержит точку множества M.

Определение. *Замыканием* $\operatorname{Cl}M$ множества $M\subset X$ называется добавление к нему всех его предельных точек.

Утверждение 3.1. *Множество* $\operatorname{Cl}M$ *замкнуто.*

□ Возьмём произвольную точку из дополнения к $\operatorname{Cl}M$. Она обладает окрестностью U, не пересекающейся с множеством $\operatorname{Cl}M$. Теперь пробежимся по всем точкам дополнения и объединим все такие окрестности. Это будет открытое множество, не пересекающееся с $\operatorname{Cl}M$. ■

Утверждение 3.2. *Замкнутое множество содержит все свои предельные точки.*

□ Допустим, что замкнутое множество M пространства X не содержит какой-нибудь своей предельной точки x. Рассмотрим множество $X\setminus M$. Оно содержит точку x и не имеет с M общих точек. Значит, $X\setminus M$ — открытая окрестность точки x, не пересекающаяся с M. Значит, точка x не может быть предельной для M. ■

Следствие 3.1. *Множества, которые не имеют предельных точек, являются замкнутыми.*

3.1.2. Компактность. Критерии компактности

Определение. Топологическое пространство называется *компактным*, если из всякого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Определение. Система множеств $X_\alpha\subset X$ называется *центрированной*, если любое конечное пересечение множеств из этого семейства непусто.

Теорема 3.3 (Критерий компактности в терминах центрированных замкнутых систем). *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

□ Пусть X компактно. Рассмотрим произвольную центрированную систему замкнутых множеств $\{F_\alpha\}$. Допустим, что $\bigcap F_\alpha = \varnothing$. Тогда $X \setminus \bigcap F_\alpha = X \setminus \varnothing = X = \bigcup (X \setminus F_\alpha)$. Множества $X \setminus F_\alpha$ открыты, поэтому $\{X \setminus F_\alpha\}$ есть открытое покрытие пространства X. Из него можно выделить конечное подпокрытие $\{X \setminus F_i\}_{i=1}^n$, откуда, снова переходя к дополнениям, получаем, что $\bigcap\limits_{i=1}^n F_i = \varnothing$. Это противоречит тому, что исходная система центрирована.

Обратно, рассмотрим произвольное открытое покрытие $X = \bigcup G_\alpha$. Тогда $\bigcap (X \setminus G_\alpha) = \varnothing$, поэтому эта система не может быть центрированной. Поэтому найдётся конечная подсистема $\{X \setminus G_i\}_{i=1}^n$, для которой $\bigcap\limits_{i=1}^n (X \setminus G_i) = \varnothing$. Тогда $\{G_1, \ldots, G_n\}$ будет искомым конечным подпокрытием. ■

Задача 3.1. *Замкнутые подмножества компактных топологических пространств компактны.*

Решение. Пусть X — компактное топологическое пространство, и $F \subset X$ — замкнутое подмножество. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{G_\alpha\}$ этого множества. Поскольку $X \setminus F$ открыто, система

$$(X \setminus F) \cup \left(\bigcup G_\alpha\right)$$

есть открытое покрытие для X. В силу компактности пространства из неё можно выделить конечное подпокрытие $\{G_1, \ldots, G_n\}$. Исключив из этого подпокрытия множество $X \setminus F$, мы получим конечное открытое подпокрытие для F. ■

Определение. Множество называется *счётно-компактным*, если любое бесконечное подмножество в нём имеет предельную точку.

Замечание. В этом определении слово «бесконечное» можно заменить на слово «счётное».

Утверждение 3.4. *Следующие условия эквивалентны:*

- *Пространство X счётно-компактно.*
- *Всякая счётная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*
- *Всякое счётное открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.*

□ Установим сначала эквивалентность первого и второго утверждения.

Пусть X счётно-компактно. Рассмотрим центрированную систему замкнутых подмножеств $\{F_n\}$. Рассмотрим систему вложенных замкнутых множеств

$$S_1 := F_1,\ S_2 := F_1 \cap F_2,\ S_3 := F_1 \cap F_2 \cap F_3, \ldots$$

Все они непусты, поскольку система центрированная. Если эта последовательность стабилизируется, то всё доказано. Если она убывает, то можно считать, что она убывает строго. Выберем последовательность $x_i \in S_i$, тогда в силу определения счётной компактности, она имеет предельную точку x_0. Она принадлежит каждому множеству S_i, поскольку они замкнуты, и вся последовательность, за исключением конечного числа точек, содержится в каждом из множеств S_i. Поэтому x_0 принадлежит пересечению всех F_i, значит, оно непусто.

Обратно, пусть нашлась последовательность $\{x_n\}$, у которой нет предельных точек. Следовательно, множества $\{x_n\}_{n \geqslant k}$ замкнуты (у них тем более нет предельных точек). Заметим, что это центрированная система. Но, очевидно,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \{x_n\}_{n \geqslant k} = \varnothing.$$

Значит, эта центрированная система имеет пустое пересечение.

Доказательство эквивалентности второго и третьего утверждений проводится так: в теореме 3.3 заменяем слова «компактность» на «существование среди всякого счётного покрытия конечного подпокрытия», а произвольные центрированные системы заменяем счётными. ■

Утверждение 3.5. *Пусть X — пространство со счётной базой. Тогда все покрытия X можно считать счётными.*

□ Пусть $\{U_n\}$ — база топологии. Пусть $X = \bigcup G_\alpha$. Рассмотрим какое-нибудь G_α и произвольную точку x в нём. Найдём такое U_k, что $x \in U_k \subset G_\alpha$. Поступим так со всеми точками x и с каждым G_α, тогда все полученные таким образом множества U_k будут образовывать искомое счётное покрытие. ■

Определение. Пространство X называется *сепарабельным*, если в нём есть счётное всюду плотное множество.

Утверждение 3.6. *Пространство X со счётной базой сепарабельно.*

$\square$ В самом деле, пусть $\{U_n\}$ — счётная база. Возьмём в каждом множестве U_n по одной точке x_n. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ всюду плотна в X. В самом деле, возьмём произвольную точку x и рассмотрим произвольную её окрестность. Она является объединением некоторого набора элементов базы, значит, в эту окрестность попадёт хотя бы одна точка последовательности $\{x_n\}$. $\blacksquare$

3.2. Метрические пространства

3.2.1. Определение метрического пространства

Определение. *Метрическое пространство* — это множество M с функцией $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}$ такой, что:

- $\rho \geqslant 0$, причём для всех $x, y \in M$ выполнено $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ для всех $x, y \in M$;
- $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ для всех $x, y, z \in M$ (неравенство треугольника).

Замечание. Всякое нормированное пространство является метрическим пространством. Действительно, легко проверить, что задание метрики по формуле $\rho(x,y) := \|x - y\|$ удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение. Пусть M — метрическое пространство. Говорят, что последовательность $\{x_n\} \subset M$ *сходится* к $x \in M$, если $\rho(x_n, x) \to 0$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для $\forall\, \varepsilon > 0$ найдётся N такое, что для $\forall\, n, m \geqslant N$ имеем $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Метрическое пространство называется *полным*, если в нём всякая фундаментальная последовательность сходится к некоторой точке этого пространства.

Очевидно, что замкнутое подмножество полного метрического пространства является полным пространством.

3.2.2. Принцип сжимающих отображений

Определение. Пусть M — метрическое пространство. Отображение $f\colon M \to M$ называется *сжимающим*, если найдётся $\alpha \in [0,1)$, для которого $\forall\, x, y \in M$ имеем $\rho\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \alpha \cdot \rho(x,y)$.

Теорема 3.7 (О сжимающих отображениях). *Пусть M — полное метрическое пространство, а f — сжимающее отображение. Тогда у него существует единственная неподвижная точка.*

$\square$ Единственность такой точки сразу следует из определения сжимающего отображения: если бы их было две, тогда расстояние между ними сохранилось бы, что невозможно. Докажем существование: рассмотрим произвольную точку $y \in M$ и рассмотрим итерации нашего отображения:

$$y,\ f(y),\ f\big(f(y)\big) = f^2(y),\ f^3(y),\ \ldots$$

Положим $y_k = f^k(y)$. Последовательность $\{y_k\}$, очевидно, фундаментальна. В самом деле,

$$\rho(y_k, y_{k+1}) \leqslant \alpha^k \rho(y, y_1),$$

поэтому

$$\rho(y_n, y_m) \leqslant \rho(y_m, y_{m+1}) + \rho(y_{m+1}, y_{m+2}) + \ldots + \rho(y_{n-1}, y_n) = (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^n)\rho(y, y_1),$$

а последнее выражение можно сделать маленьким как остаток сходящегося ряда для геометрической прогрессии. В силу полноты пространства, наша последовательность сходится к некоторому пределу $x \in M$. Покажем, что это и есть искомая неподвижная точка. Отображение f, очевидно, является непрерывным, поскольку близкие точки переходят в близкие. По свойствам непрерывных отображений имеем $f(y_k) \to f(x)$, если $y_k \to x$. Поэтому, если $f^k(y) \to x$, то и $f\big(f^k(y)\big) \to f(x)$. Но последовательности $\big\{f^k(y)\big\}$ и $\big\{f\big(f^k(y)\big)\big\}$ совпадают с точностью до первого члена, поэтому их пределы одинаковы. Следовательно, $x = f(x)$, что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Задача 3.2. *Пусть X — полное метрическое пространство, а про непрерывное отображение $f\colon X \to X$ известно, что некоторая его степень f^k является сжимающим отображением. Доказать, что оно имеет единственную неподвижную точку. Можно ли отказаться в этом утверждении от непрерывности f?*

Решение. По предыдущей теореме, отображение $F := f^k$ имеет единственную неподвижную точку x_0. Очевидно, если x — неподвижная точка отображения f, то она тем более является неподвижной точкой отображения F. Осталось доказать, что x_0 действительно является неподвижной точкой для f. Допустим противное, то есть $f(x_0) = x_1 \neq x_0$. Тогда

$$F(x_1) = F\big(f(x_0)\big) = f^k\big(f(x_0)\big) = f^{k+1}(x_0) = f\big(f^k(x_0)\big) = f\big(F(x_0)\big) = f(x_0) = x_1,$$

то есть x_1 является ещё одной неподвижной точкой для F. Противоречие. А непрерывность не нужна! ■

Задача 3.3. *Доказать существенность условия полноты в теореме о сжимающих отображениях.*

Решение. Берём полное метрическое пространство — прямую $\mathbb{R}$, выкалываем из неё точку $x = 0$, получаем неполное метрическое пространство. Рассматриваем отображение $x \mapsto \frac{x}{2}$. Оно, очевидно, сжимающее, но не имеет неподвижных точек, поскольку при $x \neq 0$ равенство $\frac{x}{2} = x$ невозможно. ■

3.2.3. Теорема о пополнении метрических пространств

Определение. Метрическое пространство M называется *ограниченным*, если найдётся $x \in M$ и $C > 0$, для которых при всех $y \in M$ имеем $\rho(x, y) \leqslant C$.

Определение. Полное пространство $(\widetilde{M}, \widetilde{\rho})$ называется *пополнением* метрического пространства (M, ρ), если найдётся инъекция $\varphi\colon M \to \widetilde{M}$ такая, что $\operatorname{Cl}\varphi(M) = \widetilde{M}$ и для $\forall\, x, y$ имеем $\rho(x, y) = \widetilde{\rho}\big(\varphi(x), \varphi(y)\big)$.

Замечание. В принципе, можно отказаться от требования $\operatorname{Cl}\varphi(M) = \widetilde{M}$, но без него указанное пополнение может оказаться не единственным.

Теорема 3.8. *Для всякого метрического пространства (M, ρ) существует пополнение $(\widetilde{M}, \widetilde{\rho})$, причём оно единственно в том смысле, что если $(\widetilde{M}_1, \widetilde{\rho}_1)$ и $(\widetilde{M}_2, \widetilde{\rho}_2)$ — два пополнения одного и того же пространства, то $(\widetilde{M}_1, \widetilde{\rho}_1)$ изометрично $(\widetilde{M}_2, \widetilde{\rho}_2)$.*

Доказательство этой теоремы можно прочесть в [2, гл. II, § 3, п. 4].

Задача 3.4. *Доказать, что полное метрическое пространство из четырёх точек A, B, C, D с расстояниями $\rho(A, B) = \rho(B, C) = \rho(C, A) = 1$ и $\rho(A, D) = \rho(B, D) = \rho(C, D) = \frac{1}{2}$ нельзя вложить в гильбертово пространство.*

Решение. Достаточно показать, что в трёхмерном пространстве нет четырёх точек с такими расстояниями. Но это очевидно — шары радиуса $\frac{1}{2}$ с центрами в вершинах правильного треугольника со стороной 1 не имеют общей точки. Комплексный случай сводится к вещественному — достаточно рассмотреть наше пространство как вещественное с тем же скалярным произведением. ■

А вот доказательство теоремы о пополнении, которое было дано на лекциях. Исходно оно было неверным: ошибка лектора была в том, что нужно было рассматривать непрерывные и *ограниченные* функции.

□ Для начала докажем это для ограниченных метрических пространств. Рассмотрим пространство $\mathbf{C}(M) \cap \mathbf{B}(M)$ непрерывных ограниченных функций на пространстве M с чебышёвской нормой

$$\operatorname{dist}(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|\,.$$

Оно, как легко видеть, полное (равномерный предел непрерывных функций непрерывен). Покажем, что существует изометричное вложение $M \hookrightarrow \mathbf{C}(M)$. Построим отображение $\varphi\colon x \mapsto f_x$, где $f_x(y) = \rho(x, y)$. Понятно, что это корректно, поскольку для разных точек эти функции будут иметь нули в разных точках: если $x_1 \neq x_2$, то $f_{x_i}(x_i) = 0$, а $f_{x_1}(x_2) \neq 0 \neq f_{x_2}(x_1)$.

Покажем, что данное вложение является изометрией. Имеем в силу неравенства треугольника

$$\operatorname{dist}(f_{x_1}, f_{x_2}) = \sup_x |\rho(x_1, x) - \rho(x_2, x)| \leqslant \rho(x_1, x_2),$$

причём при $x = x_1$ получаем как раз значение $\rho(x_1, x_2)$. Вот оно и построено. ■

3.2.4. Теорема о вложенных шарах и теорема Бэра о категориях

В этом параграфе M — метрическое пространство.

Теорема 3.9 (О вложенных шарах). *Пусть пространство M полно, и $\{B_i(x_i, r_i)\}$ — последовательность вложенных замкнутых шаров, причём $r_i \to 0$. Тогда их пересечение непусто.*

□ Поскольку $r_i \to 0$, а $B_i \supset B_{i+1}$, последовательность $\{x_i\}$ будет фундаментальной и потому сходится к некоторому $x \in M$ в силу полноты пространства. Покажем, что x является искомой точкой. Действительно, если бы нашёлся шар B_{i_0} такой, что $x \notin B_{i_0}$, тогда бы точка x не лежала бы ни в одном из шаров, начиная с номера i_0. Но поскольку дополнение к B_{i_0} открыто, x можно отделить окрестностью от всех шаров, начиная с номера i_0. Это противоречит тому, что x — предел последовательности центров шаров. ■

Замечание. Очевидно, что в силу сходимости $r_i \to 0$ это пересечение будет состоять из одной точки. Действительно, если бы их было две, то расстояние d между ними было бы ненулевое. Когда радиусы шаров станут меньше, чем $\frac{d}{3}$, эти две точки не поместятся в шаре такого радиуса одновременно.

Задача 3.5. *Показать существенность требования $r_i \to 0$ в теореме о вложенных шарах.*

Решение. В качестве примера, подтверждающего необходимость этого условия, рассмотрим пространство $\mathbb{N}$ с метрикой

$$\rho(n, m) := \begin{cases} 0, & m = n, \\ 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, & m \neq n. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим замкнутые шары B_n с центрами в точках n и радиусами $1+\frac{2}{n}$. Тогда они все вложены друг в друга, но их пересечение пусто. В самом деле, шар B_n состоит из точек m таких, что $m \geqslant n$, потому что лишь при таких m имеем $1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \leqslant 1+\frac{2}{n}$. Таким образом, центры шаров находятся «с краю», и пересечение $\bigcap\limits_n [n, +\infty) = \varnothing$. ■

Задача 3.6. *Показать, что для банаховых пространств требование $r_i \to 0$ можно убрать.*

Определение. Множество $Y \subset M$ называется *нигде не плотным* в M, если всякий шар $B \subset M$ ненулевого радиуса содержит другой шар B' ненулевого радиуса такой, что $Y \cap B' = \varnothing$.

Утверждение 3.10. *Замыкание нигде не плотного множества M является нигде не плотным.*

□ Допустим, что замыкание плотно в некотором шаре B. Это означает, что всякий шар B' внутри B содержит точку из $\mathrm{Cl}\, M$, но это значит, что где-то рядом есть и точка из множества M, причём можно считать, что эта точка принадлежит B'. Но это означает, что M плотно в B. Противоречие. ■

Определение. Множество $Y \subset M$ называется *всюду плотным* в M, если $\mathrm{Cl}\, Y = M$.

Определение. Множество Y называется *множеством первой категории*, если оно может быть представлено как счётное объединение нигде не плотных множеств.

Теорема 3.11 (Бэра о категориях). *Полное метрическое пространство M не может быть множеством первой категории.*

□ Допустим, что $M = \bigcup Y_i$, причём Y_i нигде не плотны. Рассмотрим множество Y_1, тогда найдётся замкнутый шар B_1, для которого $B_1 \cap Y_1 = \varnothing$. Рассмотрим множество Y_2 и возьмём $B_2 \subset B_1$ так, чтобы $B_2 \cap Y_2 = \varnothing$. Продолжим этот процесс, получим последовательность замкнутых шаров $\{B_i\}$. По теореме о вложенных шарах найдётся $x \in \bigcap B_i$, но это означает, что x не лежит ни в одном из Y_i. ■

3.2.5. Компактные метрические пространства

Определение. Пусть X — метрическое пространство. Множество $M \subset X$ называется *компактным*, если из любой последовательности $\{x_i\} \subset M$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $x \in M$.

Определение. Множество M называется *предкомпактным*, если из любой последовательности $\{x_i\} \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Определение. Говорят, что множество N образует *ε-сеть* для множества M, если в ε-окрестности любой точки $x \in M$ найдётся точка из N.

Замечание. Иногда требуют, чтобы множество N содержалось в самом множестве M, но, как несложно показать, эти определения эквивалентны.

Определение. Множество M называется *вполне ограниченным*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для M.

Теорема 3.12 (Критерий Хаусдорфа). *Бесконечное подмножество M в метрическом пространстве предкомпактно тогда и только тогда, когда для $\forall\, \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для M.*

□ Пусть нашлось такое $\varepsilon_0 > 0$, что для него не существует конечной ε_0-сети. Иначе говоря, всякое конечное семейство окрестностей радиуса ε_0 не может покрыть всё множество M. Возьмём $x_1 \in M$ и накроем его ε_0-окрестностью U_1. Набор $\{U_1\}$ не покрывает M, поэтому найдётся $x_2 \in M \setminus U_1$. Накроем его окрестностью U_2, но $\{U_1, U_2\}$ снова не покроет всё множество M. Выбирая $x_3 \in M \setminus (U_1 \cup U_2)$ и так далее, получим последовательность, у которой $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon_0$, поэтому из неё нельзя выделить фундаментальную. Таким образом, M не предкомпактно.

Обратно, пусть для $\forall\, \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Пусть $\{x_i\} \subset M$ — произвольная последовательность, выделим из неё фундаментальную. Возьмём 1-сеть, тогда найдётся окрестность, в которой бесконечно много членов последовательности. Выберем оттуда один элемент x_1^* и в качестве новой последовательности возьмём только то, что попало в эту окрестность. Далее, существует конечная $\frac{1}{2}$-сеть, покрывающая новую последовательность. Снова выберем ту окрестность сети, в которой бесконечно много элементов, и в ней возьмём произвольный x_2^*. Продолжим этот процесс, то есть на n-м шаге будем выбирать $\frac{1}{2^n}$-сеть. Ясно, что последовательность $\{x_i^*\}$ будет фундаментальна. ■

Следствие 3.2. *Любое компактное метрическое пространство сепарабельно.*

□ Пусть X — компактное метрическое пространство. Покажем, что X полно. В самом деле, если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, то по определению компактности из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $x \in X$. Но из этого, очевидно, следует, что к x сходится и вся последовательность. Значит, X полно.

Построим в X счётное всюду плотное множество D. По критерию Хаусдорфа, для $\forall \varepsilon$ в X существует конечная ε-сеть $C_\varepsilon := \left\{x_1^\varepsilon, \dots, x_{k_\varepsilon}^\varepsilon\right\}$. Рассмотрим

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\frac{1}{n}}.$$

Очевидно, что D счётно и всюду плотно в X. ■

4. Нормированные и банаховы пространства

4.1. Линейные функционалы и операторы

4.1.1. Основные понятия

Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Определение. *Норма* — функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ со свойствами:

1° Для $\forall\, x, y \in X$ имеем $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ — неравенство треугольника.
2° Для $\forall\, x \in X$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$ имеем $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ — однородность.
3° Для $\forall\, x \in X$ из $\|x\| = 0$ следует $x = 0$ — точность.

Определение. Линейный оператор $A\colon X \to X$ называется *ограниченным*, если $\exists\, C > 0\colon \|Ax\| \leqslant C\,\|x\|$ для всех $x \in X$.

Определение. *Норма* линейного оператора — число $\|A\| := \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Задача 4.1. *Доказать, что* $\|A\|$ *совпадает с числом* $\inf C$*, где* C *— константа из определения ограниченного оператора. Доказать, что норму можно определять и так:* $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Задача 4.2. *Пусть* A, B *— ограниченные операторы. Доказать, что* $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Решение. Имеем $\|AB\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leqslant \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|A\|\cdot\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\|$. ■

Задача 4.3. *Доказать, что ограниченность оператора равносильна его непрерывности.*

Буквой I мы будем обозначать тождественный оператор $I\colon X \to X$.

Очевидно, что вектор $x \neq 0$ является собственным с собственным значением λ тогда и только тогда, когда $x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

Определение. *Обратным* к ограниченному оператору A называется такой ограниченный оператор B, что $AB = BA = I$.

4.1.2. Спектр оператора

Определение. Пусть A — ограниченный оператор. Рассмотрим оператор $A - \lambda I$. *Спектром* оператора называется множество точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых не существует ограниченного обратного оператора к $A - \lambda I$. Мы будем обозначать спектр оператора A через $\Sigma(A)$.

Определение. Точки, лежащие в дополнении к спектру, называются *регулярными.*

Определение. Пусть $A\colon X \to X$ — ограниченный оператор. *Резольвентой* оператора называется функция

$$\mathcal{R}_A\colon \mathbb{C} \setminus \Sigma(A) \to \operatorname{End} X, \quad \mathcal{R}_A(z) := (A - zI)^{-1}.$$

4.1.3. Непустота спектра ограниченного оператора

Лемма 4.1 (Тождество Гильберта). *Для резольвенты оператора* A *имеет место формула*

$$\mathcal{R}(z) - \mathcal{R}(w) = (z - w)\mathcal{R}(z)\mathcal{R}(w).$$

□ Рассмотрим тождество $(A - wI) - (A - zI) = (z - w)I$. Домножим слева на оператор $\mathcal{R}(z)$, а справа на $\mathcal{R}(w)$, получим

$$\mathcal{R}(z)(A - wI)\mathcal{R}(w) - \mathcal{R}(z)(A - zI)\mathcal{R}(w) = \mathcal{R}(z)(z - w)\mathcal{R}(w).$$

После сокращения прямых и обратных операторов получим $\mathcal{R}(z) - \mathcal{R}(w) = (z - w)\mathcal{R}(z)\mathcal{R}(w)$. ■

Лемма 4.2. *Резольвента является дифференцируемой операторнозначной функцией.*

☐ Используя определение производной и тождество Гильберта, получаем

$$\mathcal{R}'(z) := \lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{R}(z+h)-R(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(z+h-z)\mathcal{R}(z+h)\mathcal{R}(z)}{h} = \mathcal{R}^2(z).$$

■

Теорема 4.3. *Спектр ограниченного оператора непуст.*

☐ Допустим противное, тогда резольвента определена для любого $z\in\mathbb{C}$. Заметим, что $\mathcal{R}(z)\to 0$ при $z\to\infty$. В самом деле,

$$(A-zI)^{-1} = \left(-z\left(I-\frac{A}{z}\right)\right)^{-1} = -\frac{1}{z}\left(I-\frac{A}{z}\right)^{-1}\to 0,$$

ибо второй множитель ограничен, а первый стремится к 0.

Рассмотрим какой-нибудь функционал $\varphi\in X^*$. Рассмотрим функцию $f(z) := \varphi\big(\mathcal{R}(z)x\big)$. Покажем, что f — целая функция. Продифференцируем её:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi\big(\mathcal{R}(z+h)x\big)-\varphi\big(\mathcal{R}(z)x\big)}{h} = \lim_{h\to 0}\varphi\left(\frac{\mathcal{R}(z+h)-\mathcal{R}(z)}{h}x\right) = \varphi\big(\mathcal{R}^2(z)x\big).$$

По доказанному выше, $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$. Таким образом, f определена всюду и ограничена. По теореме Лиувилля $f\equiv\mathrm{const}$, но так как $f(\infty)=0$, то $f\equiv 0$. Следовательно, для всякого x и произвольного функционала φ имеем $\varphi\big(\mathcal{R}^2(z)x\big)=0$. По следствию из теоремы Хана – Банаха, $\mathcal{R}^2(z)x=0$ для всякого x. Но это означает, что резольвента $\mathcal{R}(z)$ является тождественно нулевым оператором при всех z, что невозможно. ■

4.1.4. Теорема Хана – Банаха

Определение. Пусть $(P,\prec)$ — частично упорядоченное множество. *Цепью* называется произвольное подмножество в P, в котором любые два элемента сравнимы. Элемент $p\in P$ называется *максимальным*, если из $p\prec q$ следует, что $p=q$. Элемент $p\in P$ для цепи S называется *верхней гранью*, если для $\forall\, q\in S$ имеем $q\prec p$.

Утверждение 4.4 (Лемма Цорна). *Пусть $(P,\prec)$ — частично упорядоченное множество. Если для любой цепи подмножества P существует верхняя грань, то существует максимальный элемент в P.*

Теорема 4.5 (Хана – Банаха о продолжении функционалов). *Пусть X — нормированное пространство. Пусть L — подпространство в X, а f — ограниченный вещественный функционал на L. Тогда существует функционал $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ такой, что $\|\varphi\|=\|f\|$ и $\varphi\big|_L = f$.*

☐ Вначале покажем, что f можно продолжить указанным образом на подпространство $M := L\oplus\langle x_0\rangle$, где $x_0\notin L$. Всякий вектор $x\in M$ однозначно представляется в виде $x=v+tx_0$, где $v\in L$.

Пусть $x,y\in L$, тогда

$$f(x)-f(y) = f(x-y)\leqslant \|f\|\cdot\|x-y\|\leqslant \|f\|\cdot\|x+x_0\|+\|f\|\cdot\|y+x_0\|,$$

поэтому

$$f(x)-\|f\|\cdot\|x+x_0\|\leqslant f(y)+\|f\|\cdot\|y+x_0\|.$$

Перейдём слева к верхней грани по $x\in L$, а справа к нижней грани по $y\in L$. Получим

$$S := \sup_{x\in L}\big(f(x)-\|f\|\cdot\|x+x_0\|\big)\leqslant \inf_{y\in L}\big(f(y)+\|f\|\cdot\|y+x_0\|\big) =: I.$$

Возьмём число $c\in[S,I]$. Рассмотрим функционал φ на M, заданный так:

$$\varphi(x+tx_0) := f(x)-tc.$$

Он, очевидно, линеен и совпадает с f на L. Докажем, что $\|\varphi\|=\|f\|$.

Пусть $t>0$. Тогда

$$|\varphi(x+tx_0)| = t\left|f\left(\frac{x}{t}\right)-c\right|.$$

Покажем, что

$$\left|f\left(\frac{x}{t}\right)-c\right|\leqslant\|f\|\cdot\left\|\frac{x}{t}+x_0\right\|.$$

В самом деле, $c\geqslant\sup\limits_{x\in L}\big(f(x)-\|f\|\cdot\|x+x_0\|\big)$, значит, в частности, $c\geqslant f\left(\frac{x}{t}\right)-\|f\|\cdot\left\|\frac{x}{t}+x_0\right\|$. Аналогично, $c\leqslant\inf\limits_{x\in L}\big(f(x)+\|f\|\cdot\|x+x_0\|\big)$, значит, в частности, $c\leqslant f\left(\frac{x}{t}\right)+\|f\|\cdot\left\|\frac{x}{t}+x_0\right\|$. Следовательно, оценка верна. Поэтому

$$|\varphi(x+tx_0)| = t\left|f\left(\frac{x}{t}\right)-c\right|\leqslant t\,\|f\|\cdot\left\|\frac{x}{t}+x_0\right\| = \|f\|\cdot\|x+tx_0\|.$$

Аналогичная оценка получается для $t < 0$. Таким образом, $\|\varphi\| \leqslant \|f\|$, но при продолжении норма не может уменьшиться. Итак, $\|f\| = \|\varphi\|$.

Для сепарабельных пространств дальнейшие рассуждения очевидны. Покажем, как действовать в случае, когда сепарабельности нет. Рассмотрим всевозможные продолжения f и введём на них частичный порядок: будем считать, что $f_1 \prec f_2$, если $\operatorname{Dom} f_1 \subset \operatorname{Dom} f_2$ и $f_1 = f_2$ на $\operatorname{Dom} f_1$. Пусть $\{f_\alpha\}$ — произвольная цепь. Обозначим $L_\alpha := \operatorname{Dom} f_\alpha$ и покажем, что её верхней гранью является функционал $\widehat{f}$, определённый на $\bigcup\limits_\alpha L_\alpha$, причём $\widehat{f}(x) = f_\alpha(x)$, если $x \in L_\alpha$. Действительно, очевидно, что $\widehat{f}$ линеен и $\|\widehat{f}\| = \|f\|$. По лемме Цорна множество продолжений имеет максимальный элемент. Он определён на всём X, в противном случае его можно было бы продолжить. ■

4.1.5. Лемма Рисса о почти перпендикуляре

Лемма 4.6 (Рисса о почти перпендикуляре). *Пусть X — нормированное пространство, а $Y \subsetneq X$ — замкнутое подпространство. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует «почти перпендикуляр» $x \in X$ такой, что $\|x\| = 1$, а $\rho(x, Y) > 1 - \varepsilon$.*

□ Поскольку $Y \neq X$ и замкнуто, найдётся $z \neq 0$, для которого $\rho(z, Y) = a > 0$. Тогда найдётся последовательность $y_i \in Y$, для которых имеем $\rho(z, y_i) = \|z - y_i\| \to \rho(z, Y)$. Имеем $a = \rho(z, Y) \overset{!}{=} \rho(z - y_i, Y)$. В пояснении нуждается только переход, отмеченный знаком «!», и следует он из того, что всякое линейное пространство инвариантно относительно сдвигов на *свои* векторы. По определению расстояния, найдётся i, для которого $\|z - y_i\| \leqslant \frac{a}{1-\varepsilon}$. Тогда

$$\rho\left(\frac{z - y_i}{\|z - y_i\|}, Y\right) = \frac{1}{\|z - y_i\|} \cdot a \geqslant \frac{1-\varepsilon}{a} \cdot a = 1 - \varepsilon.$$

Таким образом, вектор $x = \frac{z - y_i}{\|z - y_i\|}$ — искомый. ■

4.1.6. Лемма о продолжении функционала

Лемма 4.7. *Пусть $Y \subsetneq X$ — замкнутое подпространство, и пусть $x \notin Y$. Тогда существует ограниченный функционал f такой, что $f(x) = 1$ и $f(Y) = 0$.*

□ В самом деле, на векторах из $\langle x, Y\rangle$ положим $f(\lambda x + y) = \lambda$. Далее этот функционал можно продолжить на всё пространство с сохранением нормы по теореме Хана – Банаха. Осталось понять, почему этот функционал ограничен на $\langle x + Y\rangle$. Действительно,

$$|f(\lambda x + y)| = |\lambda| = \frac{|\lambda| \cdot \|\lambda x + y\|}{\|\lambda x + y\|} = \frac{\|\lambda x + y\|}{\left\|x + \frac{y}{\lambda}\right\|} \leqslant \frac{1}{\rho}\left\|\lambda x + y\right\|,$$

где $\rho = \rho(x, Y) > 0$. Таким образом, норма нашего функционала ограничена числом $\frac{1}{\rho}$. ■

4.1.7. Критерий конечномерности пространства

Лемма 4.8. *Нормированное пространство X конечномерно тогда и только тогда, когда в нём всякое бесконечное ограниченное множество предкомпактно.*

□ Всякое бесконечное ограниченное множество в конечномерном пространстве предкомпактно, поскольку в этом случае $X \cong \mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$), а для этих пространств предкомпактность эквивалентна ограниченности.

Обратно, пусть всякое ограниченное подмножество в L предкомпактно. Допустим, что X бесконечномерно, тогда возьмём единичный вектор $e_1 \in X$. По предположению, $X \neq X_1 := \langle e_1\rangle$, тогда по лемме Рисса найдётся единичный вектор $e_2 \notin X_1$, для которого $\rho(e_2, X_1) \geqslant \frac{1}{2}$. Вновь по предположению $X \neq X_2 := \langle e_1, e_2\rangle$, тогда построим ещё один вектор e_3, для которого $\rho(e_3, X_2) \geqslant \frac{1}{2}$, и так далее. Цепочка подпространств X_n будет строго возрастать, и последовательность $\{e_i\}$ будет ограниченным и не предкомпактным множеством, так как расстояние между любыми двумя её элементами не меньше $\frac{1}{2}$. ■

4.1.8. Теорема Банаха – Штейнгауза

Лемма 4.9. *Если замкнутое множество не содержит ни одного шара положительного радиуса, то оно нигде не плотно.*

□ Если M не является нигде не плотным, то найдётся шар B положительного радиуса такой, что для всякого шара $B' \subset B$ имеем $M \cap B' \neq \varnothing$. Это означает, что M всюду плотно в B, но тогда $B \subset M$, ибо M замкнуто (оно содержит все свои предельные точки). ■

Теорема 4.10 (Принцип равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза). *Пусть X — банахово, а Y — нормированное пространство. Пусть $A_i\colon X \to Y$ — семейство ограниченных операторов. Пусть для всякого $x \in X$ существует число $C_x > 0$ такое, что для $\forall\, i$ имеем $\|A_i x\| \leqslant C_x$. Тогда найдётся такое $C > 0$, что $\|A_i\| \leqslant C$ для всех i.*

☐ Рассмотрим семейство множеств

$$X_n := \{x \in X\colon\ \forall\, i \text{ имеем } \|A_i x\| \leqslant n\}.$$

Очевидно, что $X = \bigcup X_n$. Поскольку X не есть множество первой категории, найдётся X_N такое, что оно не является нигде не плотным в X. Значит, есть шар, где оно всюду плотно.

Покажем, что все множества X_n замкнуты. Для этого докажем, что дополнения к ним открыты. Пусть $x \notin X_n$. Значит, $\exists\, k$, для которого $\|A_k x\| \geqslant n + 2\varepsilon$. Пусть $v \in X$. Если $\|v\| \leqslant \frac{\|A_k x\| - (n+\varepsilon)}{\|A_k\|}$, то

$$\|A_k(x+v)\| = \|A_k x + A_k v\| \geqslant \|A_k x\| - \frac{\|A_k\| \big(\|A_k x\| - (n+\varepsilon)\big)}{\|A_k\|} = n + \varepsilon > n, \tag{1}$$

то есть $(x+v) \notin X_n$.

По предыдущей лемме, множество X_N содержит некоторый шар B. Достаточно установить равномерную ограниченность операторов на некотором шаре, содержащем начало координат. Пусть $\widetilde{B}$ — копия шара B с центром в начале координат. Каждый вектор $v \in \widetilde{B}$ можно представить как $w_1 - w_2$, где $w_i \in B$. По неравенству треугольника и определению множества X_N для всех i получаем $\|A_i v\| = \|A_i w_1 - A_i w_2\| \leqslant N + N = 2N$. Но это и означает равномерную ограниченность. ■

Замечание. В этой теореме множество операторов может иметь произвольную мощность.

4.1.9. Пространство ограниченных операторов

Пусть X и Y — нормированные пространства. Обозначим через $\mathscr{L}(X,Y)$ множество всех линейных отображений $A\colon X \to Y$. Это, очевидно, линейное пространство. В нём можно выделить подпространство ограниченных линейных операторов $\mathscr{B}(X,Y)$. Если $X = Y$, то это пространство превращается в алгебру.

Определение. Говорят, что $A_n \xrightarrow{\text{s}} A$ в $\mathscr{B}(X,Y)$ («сильно» сходится), если для $\forall\, x \in X$ имеем $A_n x \to Ax$ по норме пространства Y.

Утверждение 4.11. *Если пространства X и Y банаховы, то пространство $\mathscr{B}(X,Y)$ полно относительно сильной сходимости, то есть сильный предел ограниченных операторов также является ограниченным оператором.*

☐ Пусть для всякого $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна. Покажем, что существует ограниченный оператор A такой, что $A_n \xrightarrow{\text{s}} A$. В силу фундаментальности, для $\forall\, x$ последовательность $\{A_n x\}$ ограничена. Из теоремы Банаха – Штейнгауза следует, что $\|A_n\| \leqslant K$, то есть последовательность операторов ограничена по норме. В силу полноты пространства Y, последовательность $A_n x$ сходится к некоторому вектору, который мы обозначим Ax. Отсюда, в частности, следует, что $\|A_n x\| \to \|Ax\|$. Из равномерной ограниченности следует, что $\|A_n x\| \leqslant K\,\|x\|$. Осталось перейти в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, и мы получим, что $\|Ax\| \leqslant K\,\|x\|$, то есть норма предельного оператора тоже не превосходит K. ■

Утверждение 4.12. *Если пространство Y банахово, то пространство $\mathscr{B}(X,Y)$ полно относительно операторной нормы.*

☐ Пусть $\{A_n\} \subset \mathscr{B}(X,Y)$ — фундаментальная последовательность. Тогда

$$\|A_n x - A_{n+p} x\| \leqslant \|A_n - A_{n+p}\| \cdot \|x\| \to 0,$$

поскольку $\|A_n - A_{n+p}\| \to 0$. Отсюда, в силу банаховости Y, последовательность $A_n x$ сходится к некоторому вектору, который мы обозначим Ax. Так как последовательность норм операторов фундаментальна, она ограничена, то есть $\|A_n\| \leqslant K$. Отсюда $\|A_n x\| \leqslant K\,\|x\|$, и после перехода к пределу получаем $\|Ax\| \leqslant K\,\|x\|$.

Покажем, что $\|A_n - A\| \to 0$. Для этого достаточно показать, что для $\forall\, x$ такого, что $\|x\| \leqslant 1$, выполняется неравенство $\|A_n x - Ax\| \leqslant \varepsilon\,\|x\|$. В самом деле, в силу фундаментальности для $\forall\, \varepsilon > 0$ найдётся N такое, что для $\forall\, n \geqslant N$ и для $\forall\, p$ выполнено $\|A_n x - A_{n+p} x\| \leqslant \varepsilon\,\|x\|$. Остаётся перейти к пределу при $p \to \infty$. ■

Утверждение 4.13 (О продолжении оператора по непрерывности). *Пусть $X_0 \subset X$ — всюду плотное подпространство в банаховом пространстве X. Пусть $A_0\colon X_0 \to X$ — ограниченный линейный оператор. Тогда существует ограниченное продолжение $A\colon X \to X$ оператора A_0 с сохранением нормы.*

☐ Возьмём последовательность $\{\xi_n\} \subset X_0$, которая сходится к вектору x. Рассмотрим образ этой последовательности под действием оператора A_0. Положим $Ax := \lim A_0 \xi_n$. Этот предел существует, так как $\|A_0 \xi_n - A_0 \xi_m\| \leqslant \|A_0\| \cdot \|\xi_n - \xi_m\| \to 0$.

Покажем, что такое определение корректно, то есть не зависит от выбора последовательности, приближающей x. Пусть $\xi_n \to x \leftarrow \eta_n$. Рассмотрим третью последовательность $\{\zeta_n\} := \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots$. Она тоже сходится к x, и $\lim A_0\zeta_n$ тоже существует. Осталось заметить, что $\lim A_0\xi_n$ и $\lim A_0\eta_n$ — это частичные пределы сходящейся последовательности, значит, они совпадают.

Получилось отображение $A\colon X \to X$, а так как $\|A_0\xi_n\| \leqslant \|A_0\| \cdot \|\xi_n\|$, то, переходя к пределу, получаем, что $\|Ax\| \leqslant \|A_0\| \cdot \|x\|$. Значит, норма продолженного оператора не увеличилась. С другой стороны, ясно, что она не могла уменьшиться. ■

4.1.10. Теорема Банаха об обратном операторе

Лемма 4.14. *Пусть $A\colon X \to Y$ — линейная биекция банаховых пространств. Положим*

$$Y_k := \left\{y \in Y\colon \left\|A^{-1}y\right\| \leqslant k\,\|y\|\right\}.$$

Тогда существует такое Y_N, что $\operatorname{Cl} Y_N = Y$.

□ Поскольку Y — полное пространство, по теореме Бэра существует Y_M, плотное в некотором шаре B. Обозначим через P пересечение некоторого шарового слоя с центром в точке $y_0 \in Y_M$, целиком лежащего в шаре B, с множеством Y_M. Рассмотрим копию $\widetilde{P}$ множества P, сдвинутую в начало координат. Всякий вектор $v \in \widetilde{P}$ представляется в виде разности $y - y_0$, где $y \in P$. Имеем

$$\begin{aligned}\left\|A^{-1}v\right\| = \left\|A^{-1}(y-y_0)\right\| \leqslant \left\|A^{-1}y\right\| + \left\|A^{-1}y_0\right\| \leqslant M\big(\|y\| + \|y_0\|\big) =\\ = M\big(\|y - y_0 + y_0\| + \|y_0\|\big) \leqslant M\big(\|y-y_0\| + 2\,\|y_0\|\big) = M\,\|y-y_0\|\left(1 + \frac{2\,\|y_0\|}{\|y-y_0\|}\right).\end{aligned}$$

Заметим, что последний множитель может быть ограничен сверху некоторой константой C, не зависящей ни от чего, поскольку число $\|y - y_0\|$ отделено от нуля. Беря в качестве $N := [CM] + 1$, получаем, что Y_N плотно в $\widetilde{P}$. Но поскольку в силу своего определения множество Y_N инвариантно относительно гомотетий, оно будет плотно и во всём пространстве. ■

Теорема 4.15 (Банаха об обратном операторе). *Пусть $A\colon X \to Y$ — линейная биекция банаховых пространств. Тогда обратное отображение $A^{-1}\colon Y \to X$ тоже будет ограниченным оператором.*

□ Линейность обратного отображения очевидна. Докажем ограниченность. Рассмотрим ненулевой вектор $y \in Y$. По предыдущей лемме существует всюду плотное в Y множество Y_N. Тогда существует $y_1 \in Y_N$, для которого $\|y - y_1\| \leqslant \frac{\|y\|}{2}$, причём $\|y_1\| \leqslant \|y\|$. Далее, существует $y_2 \in Y_N$, для которого $\|y - (y_1 + y_2)\| \leqslant \frac{\|y\|}{2^2}$, причём $\|y_2\| \leqslant \frac{\|y\|}{2}$, и так далее. На n-м шаге существует $y_n \in Y_N$, для которого $\|y - (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\| \leqslant \frac{\|y\|}{2^n}$, причём $\|y_n\| \leqslant \frac{\|y\|}{2^{n-1}}$.

Рассмотрим $x_n := A^{-1}y_n$. По определению Y_N имеем $\|x_n\| \leqslant N\,\|y_n\| \leqslant N\frac{\|y\|}{2^{n-1}}$. Значит, в силу полноты пространства X и сходимости ряда $\sum \|x_n\|$ существует предел

$$x := \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} x_n.$$

Тогда

$$Ax = A\left(\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p} x_n\right) = \lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p} Ax_n = \lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p} y_n = y.$$

Отсюда $A^{-1}y = x$, поэтому

$$\begin{aligned}\left\|A^{-1}y\right\| = \|x\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| = \lim_{p\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{p} x_n\right\| = \lim_{p\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{p} A^{-1}y_n\right\| \leqslant\\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left\|A^{-1}y_n\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N\,\|y_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N\frac{\|y\|}{2^{n-1}} = 2N\,\|y\|.\end{aligned}$$

Следовательно, оператор A^{-1} ограничен. ■

4.1.11. Устойчивость обратимости оператора при малых возмущениях

Лемма 4.16. *Если $A\colon X \to X$ — оператор в банаховом пространстве такой, что $\|A\| < 1$, то оператор $I - A$ обратим.*

□ Покажем, что оператор

$$P := \sum_{i=0}^{\infty} A^i$$

является обратным к оператору $I - A$. Операторный ряд следует понимать как предел частичных сумм. Покажем, что он сходится, то есть для каждого вектора $x \in X$ последовательность частичных сумм

$$S_n x := \sum_{i=0}^{n} A^i x$$

фундаментальна. В самом деле, если $m > n$, то

$$\|S_m x - S_n x\| = \left\|A^{n+1}x + \ldots + A^m x\right\| \leqslant \left\|A^{n+1}x\right\| + \ldots + \|A^m x\| \leqslant \|x\| \left(\|A\|^{n+1} + \ldots + \|A\|^m\right),$$

поэтому, если взять n достаточно большим, эту сумму можно сделать сколь угодно маленькой как хвост сходящегося ряда $\sum \|A\|^i$. В силу полноты пространства, эта последовательность сходится. Очевидно, что

$$\|Px\| \leqslant \|x\| \sum_{i=0}^{\infty} \|A\|^i,$$

поэтому оператор P ограничен. Из определения P выводим, что

$$P(I-A)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A^i (I-A)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(A^i x - A^{i+1}x\right) = \lim_{n\to\infty} \left(x - A^{n+1}x\right) = x,$$

так как $\|A\| < 1$ и второе слагаемое в пределе даёт нуль. Тем самым доказано, что P является левым обратным. Покажем, что он и правый обратный. В самом деле, оператор $I - A$ ограничен и, очевидно, перестановочен с операторами S_n. Поэтому

$$(I-A)P = (I-A)\lim S_n = \lim (I-A)S_n = \lim S_n(I-A) = P(I-A).$$

Таким образом, оператор $I - A$ обратим. ■

Теорема 4.17 (Устойчивость обратимости при малых возмущениях). *Пусть $A\colon X \to X$ — ограниченный обратимый оператор в банаховом пространстве. Тогда для всякого оператора B с нормой $\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ оператор $A + B$ обратим.*

□ Ясно, что $A+B$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $A^{-1}(A+B) = I + A^{-1}B$. Поскольку оператор A ограничен, по теореме Банаха оператор A^{-1} тоже ограничен. Так как $\left\|A^{-1}B\right\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|B\| < 1$ по условию, то в силу предыдущей леммы оператор $I + A^{-1}B$ обратим. ■

При доказательстве леммы фактически была доказана формула: если $\|A\| < 1$, то

$$(I-A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i. \tag{2}$$

Следствие 4.1. *Резольвента является аналитической функцией в своей области определения.*

□ Сумма степенного ряда голоморфна в круге сходимости. ■

Получим из формулы (2) некоторую оценку для числа $\left\|(A+B)^{-1} - A^{-1}\right\|$ при условии $\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

Имеем $A + B = A(I + A^{-1}B)$, поэтому $(A+B)^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}$. По формуле (2) получаем:

$$(A+B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}B)^n A^{-1}.$$

Отсюда

$$\left\|(A+B)^{-1} - A^{-1}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}B)^n A^{-1} + A^{-1}\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left\|A^{-1}B\right\|^n \left\|A^{-1}\right\| = \frac{\left\|A^{-1}B\right\|}{1 - \|A^{-1}B\|} \cdot \left\|A^{-1}\right\|.$$

4.1.12. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах

Теорема 4.18. *В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.*

☐ Пусть X — конечномерное нормированное пространство с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Для начала заметим, что оно изоморфно пространству $\mathbb{C}^n$, поэтому можно все рассуждения проводить для него. Покажем, что все нормы эквивалентны норме $\|\cdot\|$, заданной как сумма модулей всех координат вектора. Тогда про норму $\|\cdot\|_2$ можно забыть. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X, тогда, полагая $C := \max \|e_i\|_1$, для всякого $x \in X$ имеем

$$\|x\|_1 = \|x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\|_1 \leqslant |x_1| \cdot \|e_1\|_1 + \ldots + |x_n| \cdot \|e_n\|_1 \leqslant C \|x\| .$$

Тем самым оценка в одну сторону получена. Заметим, что в конечномерном пространстве единичная сфера компактна. Функция $x \mapsto \|x\|_1$ непрерывна относительно метрики, задаваемой нормой $\|\cdot\|$ в силу полученной выше оценки. На единичной сфере $\{x\colon \|x\| = 1\}$ она достигает своего минимального значения, которое, очевидно, отлично от нуля. Этот минимум и есть нижняя оценка для отношения норм. ■

Задача 4.4. *Вывести отсюда, что всякое конечномерное подпространство замкнуто.*

4.1.13. Отступление про неограниченные операторы

Приведём пример неограниченного оператора с пустым спектром: пусть $A\colon D(A) \to \mathbf{C}[a,b]$, где $D(A) \subset \mathbf{C}[a,b]$ — область определения оператора. Именно, рассмотрим оператор дифференцирования $A\colon f \mapsto f'$, тогда $D(A) = \mathbf{C}^1[a,b]$, но мы будем рассматривать только функции, у которых $f(a) = 0$.

Выясним, когда оператор $A - \lambda$ обратим. Для этого рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} f' - \lambda f = g, \\ f(a) = 0. \end{cases}$$

Несложно видеть, что её (единственное по теореме существования и единственности из курса дифференциальных уравнений) решение выглядит так:

$$f(x) = e^{\lambda x} \int\limits_a^x e^{-\lambda y} g(y)\, dy.$$

Таким образом, оператор $A - \lambda$ обратим при всех λ, значит, спектр оператора A пуст.

4.1.14. О графиках операторов

Примечание: Часто встречающееся здесь обозначение (a, b) для элемента декартового произведения множеств $A \times B$, $a \in A$, $b \in B$ не следует путать с столь же часто встречающимся обозначением для скалярного произведения.

Определение. *Графиком* оператора $A\colon X \to Y$, где X, Y — нормированные пространства, называется множество $\operatorname{Graph} A := \{(x, y) \mid y = Ax\} \subset X \oplus Y$. Легко видеть, что график оператора — это линейное подпространство.

Для внешней прямой суммы пространств *норму* вводят естественным образом: $\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$. Очевидно, что прямая сумма пространств будет банаховым пространством тогда и только тогда, когда оба слагаемых банаховы.

Определение. Если график оператора замкнут, то оператор называется *замкнутым.*

Утверждение 4.19. *Всюду определённый оператор $A\colon X \to X$ в банаховом пространстве с замкнутым графиком ограничен.*

☐ Поскольку замкнутое подмножество полного пространства полно, график оператора — это тоже полное пространство. В нашем случае $\operatorname{Graph} A = \{(x, Ax) \mid x \in X\}$. Рассмотрим проекцию $\pi\colon \operatorname{Graph} A \to X$ по правилу $\pi(x, Ax) = x$. Этот оператор ограничен, ибо $\|\pi(x)\| = \|x\| \leqslant \|x\| + \|Ax\|$, поэтому $\|\pi\| \leqslant 1$. Легко видеть, что π — биекция, поэтому обратное отображение $\pi^{-1}\colon x \mapsto (x, Ax)$ ограничено в силу теоремы Банаха. Но это означает, что для некоторого $C > 0$ имеем $\|(x, Ax)\| = \|x\| + \|Ax\| \leqslant C \cdot \|x\|$, поэтому A тоже ограничен. ■

4.2. Сопряжённые пространства и операторы

4.2.1. Определение сопряжённого оператора

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства.

Определение. *Сопряжённым* к пространству X называется пространство всех линейных ограниченных функционалов на X. Мы будем обозначать его символом X'.

Поскольку $X' = \mathscr{B}(X, \mathbb{C})$, автоматически получаем, что сопряжённое пространство всегда полно.

Пусть теперь $A\colon X \to Y$ — ограниченный оператор, а X' и Y' — соответствующие сопряжённые пространства.

Определение. *Сопряжённым* к оператору A называется оператор $A'\colon Y' \to X'$, который функционалу $g \in Y'$ ставит в соответствие функционал f по правилу $f(x) := g(Ax)$.

Утверждение 4.20. $\|A'\| = \|A\|$.

С одной стороны, имеем

$$\|A'g\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |g(Ax)| \leqslant \|g\| \cdot \|A\|,$$

таким образом, $\|A'\| \leqslant \|A\|$. Чтобы доказать обратное неравенство, рассмотрим $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$ и функционал $g \in Y'$ такой, что $\|g\| = 1$ и $g(y) = 1$. Тогда

$$\|Ax\| = g(Ax) = (A'g)(x) \leqslant \|x\| \cdot \|g\| \cdot \|A'\| = \|x\| \cdot \|A'\|,$$

значит, $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \|A'\|$, откуда следует обратное неравенство.

4.2.2. Компактность оператора, сопряжённого к компактному

Пусть X — компактное подмножество метрического пространства.

Определение. Семейство Φ функций φ на X называется *равномерно ограниченным*, если $|\varphi(x)| \leqslant C$ для всех $x \in X$ и всех $\varphi \in \Phi$.

Определение. Семейство Φ функций φ на X называется *равностепенно непрерывным*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, для которого $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon$ для всех $x, y \in X$ таких, что $\rho(x, y) < \delta$ и для всех $\varphi \in \Phi$. Проще говоря, это та же равномерная непрерывность, но число δ универсально для всего семейства функций.

Теорема 4.21 (Арцела – Асколи). *Множество $M \subset \mathbf{C}[a, b]$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

□ Изложено в [2, гл. II, § 7, п. 4]. ■

Теорема 4.22 (Обобщённая теорема Арцела – Асколи). *Пусть X и Y — компактные метрические пространства, и $C := \mathbf{C}(X, Y)$ — пространство непрерывных отображений из X в Y с чебышёвской метрикой. Тогда подмножество $\Phi \subset C$ предкомпактно тогда и только тогда, когда Φ равностепенно непрерывно.*

□ Мы докажем только достаточность этого утверждения. Доказательство необходимости ничем не отличается от доказательства необходимости в обычной теореме Арцела, да и не потребуется нам в дальнейшем.

Пусть F — пространство всех отображений $f\colon X \to Y$, на котором введена метрика

$$\rho(f, g) := \sup_{x\in X} \rho\bigl(f(x), g(x)\bigr).$$

Равномерный предел непрерывных отображений на компакте непрерывен, поэтому C замкнуто в F. Следовательно, если Φ предкомпактно в F, то оно предкомпактно и в C.

Возьмём $\varepsilon > 0$ и по нему выберем δ, участвующее в определении равностепенной непрерывности. Возьмём в X $\frac{\delta}{2}$-сеть $x_1, \dots, x_n$ и рассмотрим шары $B_i := B\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right)$. Их объединение покрывает X. Получим из этого покрытия дизъюнктное покрытие. Таким будет, например, покрытие

$$E_i := B_i \smallsetminus \bigcup_{j<i} B_j.$$

Заметим, что $\operatorname{diam} E_i < \delta$.

Рассмотрим в компакте Y некоторую ε-сеть $y_1, \dots, y_m$. Рассмотрим набор функций $\{g\}$, которые принимают на E_i значения y_j. Такой набор, очевидно, конечен. Покажем, что они образуют 2ε-сеть для Φ в пространстве F. В самом деле, пусть $f \in \Phi$. Очевидно, для всякой точки x_i найдётся $y_{j(i)}$, для которой $\rho(f(x_i), y_j) < \varepsilon$. Возьмём в качестве g функцию со значениями $y_{j(i)}$ на множествах E_i. Тогда

$$\rho\bigl(f(x), g(x)\bigr) \leqslant \rho\bigl(f(x), f(x_i)\bigr) + \rho\bigl(f(x_i), g(x_i)\bigr) + \rho\bigl(g(x_i), g(x)\bigr) < 2\varepsilon,$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 4.23. *Оператор, сопряжённый компактному в банаховом пространстве, компактен.*

□ Пусть $A\colon X \to Y$ — компактный оператор. Пусть $B \subset X$ — единичный шар с центром в начале координат. По определению компактного оператора, множество $A(B)$ предкомпактно. Докажем предкомпактность множества $A'(B')$, где $B' := \{g \in Y'\colon \|g\| \leqslant 1\}$ — единичный шар в Y'.

Рассмотрим семейство функционалов из B' на множестве $A(B)$. Пусть $g \in B'$, а $y = Ax \in A(B)$, тогда

$$|g(y)| \leqslant \|g\| \cdot \|y\| = \|g\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \leqslant \|A\|.$$

Следовательно, функционалы из B' равномерно ограничены на $A(B)$.

Пусть теперь $y_1, y_2 \in A(B)$, а $g \in B'$. Тогда

$$|g(y_1) - g(y_2)| = |g(y_1 - y_2)| \leqslant \|g\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leqslant \|y_1 - y_2\|,$$

а это означает равностепенную непрерывность семейства B' на $A(B)$. В силу обобщения теоремы Арцела множество B' предкомпактно в смысле равномерной сходимости на $A(B)$.

Теперь рассматриваем произвольную последовательность $\{A'g_n\} \subset A'(B')$. Поскольку множество B' предкомпактно в смысле равномерной сходимости, из последовательности $\{g_n\}$ можно выделить фундаментальную относительно равномерной сходимости на $A(B)$ подпоследовательность. Иначе говоря,

$$\sup_{y \in A(B)} \left|g_{n_i}(y) - g_{n_j}(y)\right| = \sup_{x \in B} \left|g_{n_i}(Ax) - g_{n_j}(Ax)\right| \to 0, \quad n_i, n_j \to \infty.$$

Но

$$\sup_{x \in B} \left|g_{n_i}(Ax) - g_{n_j}(Ax)\right| = \sup_{x \in B} \left|A'(g_{n_i} - g_{n_j})(x)\right| = \left\|A'g_{n_i} - A'g_{n_j}\right\|.$$

А это означает, что последовательность $\{A'g_{n_k}\}$ фундаментальна в X' и тем самым компактность доказана. ■

4.3. Теория Фредгольма в банаховых пространствах

4.3.1. Вспомогательные леммы

Лемма 4.24. *Пусть A — компактный оператор. Тогда $K := \mathrm{Ker}(A - I)$ конечномерно.*

□ Пусть $M \subset K$ — произвольное ограниченное множество. Тогда для $\forall\, x \in M$ имеем $(A - I)x = 0$, то есть $Ax = x$. Значит, $A(M) = M$, но по определению компактного оператора, множество $A(M)$ предкомпактно. Таким образом, каждое ограниченное подмножество в ядре предкомпактно, поэтому по лемме 4.8 K конечномерно. ■

Замечание. В этой лемме вместо оператора $A - I$ можно с тем же успехом рассмотреть оператор $A - \lambda I$, если $\lambda \neq 0$. Тогда мы получим, что компактный оператор может иметь лишь конечное число собственных векторов с данным ненулевым собственным значением.

Лемма 4.25. *Пусть A — компактный оператор. Тогда $\mathrm{Im}(A - I)$ замкнут.*

□ Вначале покажем, что существует $\alpha > 0$, зависящее только от оператора A, такое, что если $Ax - x = y$ разрешимо, то существует решение x, для которого выполнено неравенство $\|x\| \leqslant \alpha \|y\|$. Пусть x_0 — какое-нибудь решение этого уравнения. Тогда общее решение имеет вид $x_0 + z$, где $z \in K := \mathrm{Ker}(A - I)$. Рассмотрим функцию $\varphi\colon K \to \mathbb{R}_+$, заданную по правилу

$$\varphi(z) := \|x_0 + z\|.$$

Положим $d := \inf\limits_{z \in K} \varphi(z)$, и пусть $\{z_n\}$ — минимизирующая последовательность, то есть $\varphi(z_n) \to d$.

Последовательность $\{\varphi(z_n)\}$ сходится, поэтому она ограничена. Следовательно, ограничена и последовательность $\{\|z_n\|\}$, так как

$$\|z_n\| \leqslant \|x_0 + z_n\| + \|x_0\| = \varphi(z_n) + \|x_0\|.$$

В силу леммы 4.24 подпространство K конечномерно, поэтому из неё можно выделить сходящуюся. Выкинем из неё лишнее и перенумеруем, тогда можно считать, что $z_n \to z_0$. В силу замкнутости ядра, $z_0 \in K$. Тогда в силу непрерывности $\varphi(z_n) \to \varphi(z_0)$, и $\varphi(z_0) = d$. Значит, решение $x_0 + z_0$ обладает наименьшей нормой.

Теперь докажем существование α. Через $\widetilde{x}(y)$ будем обозначать решение с минимальной нормой, соответствующее правой части y. Рассмотрим отношение $\frac{\|\widetilde{x}(y)\|}{\|y\|}$ и допустим, что оно не ограничено, тогда найдётся последовательность $\{y_n\}$, для которой

$$\frac{\|\widetilde{x}(y_n)\|}{\|y_n\|} \to \infty.$$

Для краткости положим $\widetilde{x}_n := \widetilde{x}(y_n)$. В силу линейности, правой части μy_n соответствует минимальное по норме решение $\mu \widetilde{x}_n$, поэтому можно считать, что $\|\widetilde{x}_n\| = 1$. Тогда $\|y_n\| \to 0$. В силу компактности A и ограниченности последовательности $\{\widetilde{x}_n\}$, последовательность $\{A\widetilde{x}_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Снова выкинем лишнее, тогда можно считать, что $A\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}_0$, но так как $A\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_n = y_n$, а правая часть по предположению стремится к нулю, то $A\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_n \to 0$, откуда $\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}_0$. Значит, $A\widetilde{x}_n \to A\widetilde{x}_0$, и $A\widetilde{x}_0 = \widetilde{x}_0$. Это означает, что $\widetilde{x}_0 \in K$, но в силу минимальности нормы решения $\widetilde{x}_n$ имеем $\|\widetilde{x}_n - x_0\| \geqslant \|\widetilde{x}_n\| = 1$, а это противоречит сходимости $\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}_0$.

Итак, отношение $\frac{\|\widetilde{x}(y)\|}{\|y\|}$ ограничено, и осталось положить

$$\alpha := \sup \frac{\|\widetilde{x}(y)\|}{\|y\|}.$$

Теперь докажем замкнутость образа. Пусть $y_n \in \mathrm{Im}(A-I)$ и $y_n \to y_0$. Без ограничения общности можно считать, что $\|y_{n+1}-y_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Запишем тождество

$$\underbrace{y_1} - \underbrace{y_1 + y_2} - \underbrace{y_2 + y_3} - y_3 + \ldots - \underbrace{y_n + y_{n+1}} = y_{n+1} \to y_0.$$

Пусть x_i — прообразы векторов, выделенных скобками, при отображении $(A-I)$, то есть $(A-I)x_1 = y_1$, $(A-I)x_2 = -y_1+y_2$, и так далее. Такие, конечно, найдутся, поскольку образ — линейное подпространство, а y_i в нём лежат. Но мы специально будем выбирать только такие решения x_i, для которых имеет место свойство

$$\|x_{n+1}\| \leqslant \alpha \|y_{n+1}-y_n\| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}.$$

Значит, ряд $\sum x_i$ сходится. Образ суммы этого ряда накроет y_0 в силу непрерывности. ■

4.3.2. Теоремы Фредгольма

Пусть X — банахово пространство, $A\colon X \to X$ — компактный оператор. Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} Ax - x = y, \\ Ax - x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A'f - f = g, \\ A'f - f = 0. \end{cases}$$

Теорема 4.26 (Третья теорема Фредгольма для A). *Уравнение $Ax - x = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f(y) = 0$ для $\forall\, f \in \mathrm{Ker}(A'-I)$.*

□ Пусть уравнение разрешимо. Рассмотрим $f \in \mathrm{Ker}(A'-I)$. Тогда

$$f(y) = f(Ax-x) = (A'f)(x) - f(x) = (A'f - f)(x) = \big((A'-I)f\big)(x) = 0,$$

что и требовалось.

Докажем теперь обратное утверждение теоремы. Пусть для всякого $f \in \mathrm{Ker}(A'-I)$ имеем $f(y) = 0$. Нам надо доказать утверждение $A \Rightarrow B$, а мы будем доказывать равносильное ему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, то есть если для вектора y решения нет, то найдётся функционал из ядра, который не обнуляется на этом векторе.

Пусть уравнение $Ax - x = y$ не решается, то есть $y \notin \mathrm{Im}(A-I)$. Возьмём ограниченный функционал f такой, что $f(y) = 1$, а $f\big(\mathrm{Im}(A-I)\big) = 0$. Это можно сделать в силу леммы 4.7, поскольку $\mathrm{Im}(A-I)$ замкнут в силу леммы 4.25. Далее, для всякого вектора x имеем $0 = f(Ax-x) = (A'f-f)(x)$, значит, $A'f - f = 0$. Таким образом, $f \in \mathrm{Ker}(A'-I)$, но для него не выполнено условие $f(y) = 0$, и теорема доказана. ■

Следствие 4.2. *Если $\mathrm{Ker}(A'-I) = 0$, то уравнение $Ax - x = y$ разрешимо для всех y.*

□ В самом деле, если в ядре $\mathrm{Ker}(A'-I)$ лежит только нулевой функционал, то, очевидно, для всякого вектора y выполнено свойство $f(y) = 0$ для $\forall\, f \in \mathrm{Ker}(A'-I)$, ибо $0(y) \equiv 0$. Осталось воспользоваться только что доказанной третьей теоремой Фредгольма (справа налево). ■

Теорема 4.27 (Третья теорема Фредгольма для A'). *Уравнение $A'f - f = g$ разрешимо тогда и только тогда, когда $g(x) = 0$ для $\forall\, x \in \mathrm{Ker}(A-I)$.*

□ Пусть уравнение $A'f - f = g$ разрешимо. Пусть $x \in \mathrm{Ker}(A-I)$. Имеем

$$g(x) = (A'f - f)(x) = (A'f)(x) - f(x) = f(Ax - x) = f(0) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Обратно, если функционал f есть решение, то $(A'f)(x) - f(x) = g(x)$, то есть $f(Ax-x) = g(x)$. Поэтому будем конструировать его, исходя из этого равенства. Зададим функционал f_0 на $\mathrm{Im}(A-I)$ так:

$$f_0(Ax - x) := g(x).$$

Проверим, что это корректно, то есть покажем, что значение функционала не зависит от выбора прообраза x для элемента $Ax - x$. Пусть $Ax_1 - x_1 = Ax_2 - x_2$, нужно проверить, что $g(x_1) = g(x_2)$. В самом деле, имеем $(A-I)(x_1 - x_2) = 0$, то есть $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(A-I)$. По условию теоремы, на векторах из этого ядра функционал g равен нулю, поэтому $g(x_1 - x_2) = 0$, то есть $g(x_1) = g(x_2)$.

Теперь покажем, что так определённый функционал f_0 ограничен. Как было установлено в лемме 4.25, по крайней мере для одного из прообразов x вектора y (то есть $Ax - x = y$) имеет место неравенство $\|x\| \leqslant \alpha \|y\|$. Тогда

$$|f_0(y)| = |f_0(Ax-x)| = |g(x)| \leqslant \|g\| \cdot \|x\| \leqslant \alpha \|g\| \cdot \|y\|.$$

Тем самым проверена ограниченность f_0. Остаётся продолжить его по теореме Хана – Банаха на всё пространство и обозначить это продолжение через f. Тогда для всякого x имеем

$$f(Ax-x)=f(y)=f_0(y)=g(x),$$

то есть

$$(A'f-f)(x)=g(x),$$

но это и означает, что f есть решение исходного уравнения. ■

Следствие 4.3. *Если* $\operatorname{Ker}(A-I)=0$, *то уравнение* $A'f-f=g$ *разрешимо для всех* g.

Теорема 4.28 (Первая теорема Фредгольма). *Уравнение* $Ax-x=y$ *разрешимо для любого* y *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker}(A-I)=0$.

□ Будем доказывать от противного: пусть ядро $\operatorname{Ker}(A-I)=:X_0$ нетривиально, тогда найдётся $x_0\neq 0$, для которого $Ax_0-x_0=0$. Рассмотрим уравнение $Ax-x=x_0$. По условию у него есть решение x_1, то есть $Ax_1-x_1=x_0$. Аналогично, у уравнения $Ax-x=x_1$ есть решение x_2, и так далее. Итак, $Ax_i-x_i=x_{i-1}$. Рассмотрим возрастающую цепочку подпространств $X_n:=\operatorname{Ker}(A-I)^{n+1}$. Покажем, что они строго возрастают. В самом деле, по построению имеем $(A-I)^i x_i=x_0$, а $(A-I)x_0=0$, поэтому $(A-I)^{i+1}x_i=(A-I)x_0=0$. Таким образом, вектор x_i аннулируется $(i+1)$-й степенью оператора $(A-I)$, но не аннулируется его i-й степенью. Значит, ядра не совпадают. Поскольку подпространства X_n замкнуты (это ядра непрерывных операторов), то найдётся последовательность единичных векторов $\{y_n\}$, для которых $\rho(y_n,X_{n-1})\geqslant\frac{1}{2}$. Покажем, что их образы образуют ежа. Пусть $m>n$, тогда

$$\|Ay_m-Ay_n\|=\|y_m+Ay_m-y_m-Ay_n+y_n-y_n\|=\|y_m+(A-I)y_m-(A-I)y_n-y_n\|\,.$$

Все слагаемые, кроме первого, погибнут при применении оператора $(A-I)^m$, следовательно, их сумма представляет собой некоторый вектор из X_{m-1}. Поэтому $\|Ay_m-Ay_n\|\geqslant\frac{1}{2}$. Значит, образы векторов являются ежом, что противоречит компактности оператора.

Симметричное утверждение для сопряжённых операторов доказывается аналогично.

Обратно, пусть $\operatorname{Ker}(A-I)=0$. По следствию из третьей теоремы Фредгольма для сопряжённого оператора, в этом случае уравнение $A'f-f=g$ всегда разрешимо. Пользуясь уже доказанным для сопряжённого оператора, получаем $\operatorname{Ker}(A'-I)=0$. Далее, применяя следствие из третьей теоремы Фредгольма для обычных операторов, получаем, что уравнение $Ax-x=y$ разрешимо для любого y. ■

Определение. Пусть V — (конечномерное) векторное пространство с базисом $e_1,\dots,e_n$, а V^* — сопряжённое ему пространство. Базис $\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n$ пространства V^* называется *сопряжённым* к $e_1,\dots,e_n$, если $\varepsilon^j(e_i)=\delta_i^j$.

Теорема 4.29 (Вторая теорема Фредгольма). $\dim\operatorname{Ker}(A-I)=\dim\operatorname{Ker}(A'-I)$.

□ Пусть $x_1,\dots,x_n$ — базис в $\operatorname{Ker}(A-I)$, а $f_1,\dots,f_m$ — базис в $\operatorname{Ker}(A'-I)$. Возьмём сопряжённый базис $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ к $x_1,\dots,x_n$, и $\xi_1,\dots,\xi_m$ — сопряжённый базис к $f_1,\dots,f_m$. Допустим, что $n\neq m$ и рассмотрим два случая.

1° Пусть $n<m$. Рассмотрим оператор

$$Ux=Ax+\sum_{i=1}^n\varphi_i(x)\xi_i.$$

Этот оператор компактен, поскольку это сумма компактного и конечномерного операторов.

Покажем, что $\operatorname{Ker}(U-I)=0$. В самом деле, пусть $Ux-x=0$. Распишем выражение для оператора U:

$$Ax+\sum_{i=1}^n\varphi_i(x)\xi_i=x,$$

$$Ax-x+\sum_{i=1}^n\varphi_i(x)\xi_i=0.$$

Подействуем на это выражение функционалами f_j, получим

$$f_j(Ax-x)+\sum_{i=1}^n\varphi_i(x)f_j(\xi_i)=0,\quad j=1,\dots,m,$$

или, что то же самое,

$$(A'f_j-f_j)(x)+\sum_{i=1}^n\varphi_i(x)f_j(\xi_i)=0,\quad j=1,\dots,m.$$

Но поскольку f_j лежат в ядре, то первое слагаемое равно нулю. При каждом значении j в сумме выживает только слагаемое с номером j в силу сопряжённости базисов. Следовательно, $\varphi_i(x) = 0$ при всех i, поэтому $Ux = Ax$, откуда $Ax - x = 0$, следовательно, $x \in \operatorname{Ker}(A - I)$. Но так как φ_i образуют базис пространства, сопряжённого этому ядру, и все обнуляются на векторе x, то x может быть только нулём, что и требовалось доказать.

Применим следствие третьей теоремы Фредгольма: если $\operatorname{Ker}(U - I) = 0$, то уравнение $Ux - x = y$ разрешимо при любой правой части, в частности, при $y = \xi_{n+1}$. Пусть x — решение этого уравнения. Тогда

$$1 = f_{n+1}(\xi_{n+1}) = f_{n+1}\left(Ux - x\right) = f_{n+1}\Big(Ax - x + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\xi_i\Big) =$$

$$= f_{n+1}(Ax - x) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) f_{n+1}(\xi_i) \overset{!}{=} (A'f_{n+1} - f_{n+1})(x) + 0 = \big((A' - I)f_{n+1}\big)(x) \overset{!!}{=} 0(x) = 0.$$

Здесь переход «!» следует из того, что $i < n+1$ (а потому всё убивает сопряжённость базисов), а переход «!!» — из того, что f_{n+1} лежит в ядре $\operatorname{Ker}(A' - I)$. Но так как $1 \neq 0$, мы получаем противоречие, значит, случай $n < m$ невозможен.

2° Теперь допустим, что $m < n$. Рассмотрим оператор

$$U'f = A'f + \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\varphi_i.$$

Покажем, что $\operatorname{Ker}(U' - I) = 0$. В самом деле, пусть $U'f - f = 0$. Распишем выражение для оператора U':

$$A'f + \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\varphi_i = f,$$

$$A'f - f + \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\varphi_i = 0.$$

Подействуем этим выражением на векторы x_j, получим

$$(A'f - f)(x_j) + \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\varphi_i(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

или, что то же самое,

$$f(Ax_j - x_j) + \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\varphi_i(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Но поскольку x_j лежат в ядре, то первое слагаемое равно нулю. При каждом значении j в сумме выживает только слагаемое с номером j в силу сопряжённости базисов. Следовательно, $f(\xi_i) = 0$ при всех i, поэтому $U'f = A'f$, откуда $A'f - f = 0$, следовательно, $f \in \operatorname{Ker}(A' - I)$. Но так как ξ_i образуют базис пространства, сопряжённого этому ядру (здесь мы неявно пользуемся тем, что для конечномерных пространств имеет место канонический изоморфизм $V^{**} \cong V$), и ковектор f на них равен нулю, то f может быть только нулём, что и требовалось доказать.

Применим следствие третьей теоремы Фредгольма: если $\operatorname{Ker}(U' - I) = 0$, то уравнение $U'f - f = g$ разрешимо при любой правой части, в частности, при $g = \varphi_{m+1}$. Пусть f — решение этого уравнения. Тогда

$$1 = \varphi_{m+1}(x_{m+1}) = \left(U'f - f\right)(x_{m+1}) = \Big(A'f - f + \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\varphi_i\Big)(x_{m+1}) =$$

$$= (A'f - f)(x_{m+1}) + \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\varphi_i(x_{m+1}) \overset{!}{=} f(Ax_{m+1} - x_{m+1}) + 0 = f\big((A - I)x\big) \overset{!!}{=} f(0) = 0.$$

Здесь переход «!» следует из того, что $i < n+1$ (а потому всё убивает сопряжённость базисов), а переход «!!» — из того, что x_{m+1} лежит в ядре $\operatorname{Ker}(A - I)$. Но так как $1 \neq 0$, мы получаем противоречие, значит, случай $m < n$ тоже невозможен.

Итак, остаётся единственная возможность $m = n$, но это и требовалось доказать. ■

4.3.3. Альтернатива Фредгольма

Теорема 4.30 (Альтернатива Фредгольма). *Рассмотрим уравнение $(A - I)x = y$. Тогда либо ядро $\mathrm{Ker}(A - I)$ ненулевое, либо оператор $A - I$ обратим.*

□ Пусть ядро нулевое, тогда в силу первой теоремы Фредгольма, уравнение $(A - I)x = y$ разрешимо для любого y, то есть $\mathrm{Im}(A - I) = X$. Кроме того, оператор $A - I$ инъективен. Следовательно, это биекция $X \leftrightarrow X$. По теореме Банаха оператор $A - I$ будет иметь ограниченный обратный. ■

Следствие 4.4. *Ненулевые точки спектра компактного оператора суть его собственные значения конечной кратности.*

□ В самом деле, при $\lambda \neq 0$ можно применить альтернативу Фредгольма: если $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = 0$, то оператор $A - \lambda I$ обратим, поэтому такие λ не принадлежат спектру. Если же ядро ненулевое, то его размерность конечна, как было доказано выше. ■

Замечание. Первая теорема Фредгольма допускает слегка парадоксальную переформулировку: «Если решение единственно, то оно существует».

4.3.4. Частный случай: гильбертовы пространства

Строго говоря, сопряжённое пространство H^* к гильбертову пространству H не изоморфно исходному пространству. Между H и H^* имеется так называемый *антиизоморфизм.* Задаётся он очевидным образом: Пусть $h \in H$. Сопоставим этому вектору некоторый функционал:

$$h \overset{\varphi}{\longmapsto} f_h(x) := (x, h).$$

Это корректно, так как все функционалы имеют такой вид, то есть отображение сюръективно, а инъективность сомнений не вызывает. Но скалярное произведение в пространстве над полем $\mathbb{C}$ антилинейно по второму аргументу, поэтому и φ будет антилинейным:

$$\varphi(\lambda h) = f_{\lambda h} = (x, \lambda h) = \overline{\lambda}(x, h) = \overline{\lambda}\varphi(h).$$

Такие отображения и называют антиизоморфизмами.

А вот если пространство над полем $\mathbb{R}$, то всё совсем хорошо и $H \cong H^*$.

Тогда теоремы Фредгольма переформулируются так:

$$\mathrm{Ker}(A - I) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(A - I) = H; \tag{3}$$

$$\dim \mathrm{Ker}(A - I) = \dim \mathrm{Ker}(A^* - I); \tag{4}$$

$$\mathrm{Ker}(A^* - I) = \mathrm{Im}(A - I)^{\perp}. \tag{5}$$

5. Приложение

5.1. Service Pack 1 (Миша Берштейн, Миша Левин)

Здесь под сохраняющимся спектром понимаются либо собственные значения бесконечномерной кратности, либо те значения λ, при которых будет незамкнутым образ (при этом вполне может быть конечномерное ядро).

Лемма 5.1. *Следующие два утверждения эквивалентны:*

1. *Выполняется хотя бы одно из двух условий:* $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \infty$ *или* $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ *незамкнут;*
2. $\exists$ *непредкомпактная последовательность* $\{x_n\}$*, такая, что* $\|x_n\| = 1$ *и* $(A - \lambda I)x_n \to 0$*. Предполагается, что исходное пространство банахово.*

□ В процессе доказательства леммы о замкнутости образа оператора $A - I$, если A компактен был установлен следующий факт: если ядро оператора $A - I$ конечномерно (не обязательно компактного), то $\forall y \in \mathrm{Im}(A - I) \,\exists\, \widetilde{x}$, являющееся наименьшем по норме решением уравнения $(A - I)x = y$. Понятно, что это верно и для оператора $A - \lambda I$, $\forall \lambda$.

Пусть есть оператор $B, \dim \mathrm{Ker}\, B < \infty$, тогда профакторизуем все пространство по $\mathrm{Ker}\, B$ и введем в этом новом пространстве норму: $\|x\|_1 = \|\widetilde{x}\|$, где $\widetilde{x}$ — наименьшее решение уравнения $Bz = y$, где $y = Bx$.

Докажем корректность определения. Если x_1 и x_2 лежат в одном классе эквивалентности, то $Bx_1 = Bx_2$ и, соответственно, $\widetilde{x}$ для них одинаково.

$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\, B$, значит, его образ при факторизации равен 0 — первое свойство нормы.

$\|\lambda x\|_1 = \lambda \|x\|_1$ — очевидно.

$\|x+y\|_1 = \left\|\widetilde{x+y}\right\| \leqslant \|\widetilde{x}+\widetilde{y}\| \leqslant \{$ так как $B(\widetilde{x+y}) = B\widetilde{x}+B\widetilde{y}$, а $\widetilde{x+y}$ — наименьшее решение $\} \leqslant \|\widetilde{x}\|+\|\widetilde{y}\| = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Значит, это действительно будет нормой.

Будем доказывать, что $1 \Rightarrow 2$.

1. $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I) = \infty$ — этот случай был разобран ранее.

2. $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I) < \infty$ и $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$ незамкнут.

Профакторизуем по $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ и введем норму, как это было указано выше. Мы получим оператор $B-\lambda I$, индуцированный оператором $A-\lambda I$ на факторизованном пространстве, причем $\operatorname{Ker}(B-\lambda I) = 0$, а $\operatorname{Im}(B-\lambda I)$ не замкнут. Такой случай также разбирался и, значит, для оператора $B-\lambda I$ $\exists$ искомая $\{x_n\}$. Тогда в качестве последовательности для $A-\lambda I$ возьмем $\{\widetilde{x_n}\}$. Докажем, что она подходит. Имеем $\|\widetilde{x_n}\| = \|x_n\|_1 = 1$ и $(A-\lambda I)\widetilde{x_n} = (B-\lambda I)x_n \to 0$.

Осталось доказать непредкомпактность $\{\widetilde{x_n}\}$. Предположим противное. Тогда найдётся фундаментальная подпоследовательность $\{\widetilde{x_{n_k}}\}$. Тогда для $\forall\,\varepsilon > 0$ найдётся N такое, что для $\forall\,k,l > N$ выполнено $\|\widetilde{x_{n_k}} - \widetilde{x_{n_l}}\| < \varepsilon$. Но для $\forall\,k,l$ имеем

$$\|\widetilde{x_{n_k}} - \widetilde{x_{n_l}}\| \geqslant \|\widetilde{x_{n_k} - x_{n_l}}\| = \|x_{n_k} - x_{n_l}\|.$$

Значит $\{x_{n_k}\}$ также фундаментальна. Противоречие.

Теперь докажем, что $2 \Rightarrow 1$.

Если $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$ незамкнут, то все доказано. Пусть тогда он замкнут. Если $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I) = \infty$, то все доказано. Предположим противное. Отфакторизуем по $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$. Тогда пусть t_n — образ x_n при факторизации. Докажем, что $\exists\, c > 0 : \forall\, n\ \|t_n\|_1 > c$. Предположим противное. Тогда найдётся подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$ такая, что $\|t_{n_k}\|_1 \to 0$. Тогда $\|\widetilde{x_{n_k}}\| \to 0$. Обозначим $z_k = x_{n_k} - \widetilde{x_{n_k}}$. Тогда $\|z_k\| = \|x_{n_k} - \widetilde{x_{n_k}}\| \leqslant \|x_{n_k}\| + \|\widetilde{x_{n_k}}\| \leqslant 2\|x_{n_k}\| = 2$. Очевидно, $z_k \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I)$. Тогда мы получаем ограниченную последовательность в конечномерном пространстве. Тогда она предкомпактна. После перенумерации можно считать, что $\{z_k\}$ сходится. Но тогда $\{x_{n_k}\}$ сходится как сумма сходящихся последовательностей $\{z_k\}$ и $\{\widetilde{x_{n_k}}\}$ — противоречие с тем, что $\{x_n\}$ непредкомпактна. Обозначим X - отфакторизованное пространство. Обозначим $Y = \operatorname{Im}(A-\lambda I)$. Так как Y — замкнутое подпространство банахова пространства, то Y — банахово.

Лемма 5.2. *Пространство X банахово.*

$\square$ Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в X. Пусть $\forall\, i,\,j > N_1\ \|x_i - x_j\|_1 < \frac{1}{2}$. Пусть $y_1 = x_{N_1}$. Пусть $\forall\, i,\,j > N_2 > N_1$. $\forall\, i,\,j > N_2\ \|x_i - x_j\|_1 < \frac{1}{4}$ и $y_2 = x_{N_2}$ и т.д. Тогда $\forall\, n\, \forall\, i,\,j \geqslant n\ \|y_i - y_j\|_1 < \frac{1}{2^n}$. Возьмем $z_1 = \widetilde{y_1}$, $z_n = z_{n-1} + (\widetilde{y_n - y_{n-1}})$. Тогда z_n является прообразом для y_n при отображении факторизации. $\|z_{n+1} - z_n\| = \|\widetilde{y_{n+1} - y_n}\| = \|y_{n+1} - y_n\|_1$. Тогда $\forall\, n\, \forall\, i > j \geqslant n$ имеем

$$\|z_i - z_j\| \leqslant \|z_i - z_{i-1}\| + \dots + \|z_{j+1} - z_j\| < \frac{1}{2^{i-1}} + \dots + \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

т.е. $\{z_n\}$ — фундаментальна. Тогда $z_n \to z$. Пусть y — образ z при факторизации. Тогда $y_n \to y$. Тогда $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, подпоследовательность которой сходится к y. Значит, $x_n \to y$. $\blacksquare$

Обозначим B — оператор, индуцированный $A-\lambda I$ на X. Тогда $B : X \to Y$, $\operatorname{Ker} B = 0$, X и Y — банаховы. B ограничен, так как $\|Bx\| = \|(A-\lambda I)\widetilde{x}\| \leqslant \|A-\lambda I\|\|\widetilde{x}\| = \|A-\lambda I\|\|x\|_1$. Тогда по теореме Банаха существует ограниченный $C = B^{-1}$. Обозначим $w_n = Bt_n$. Тогда $t_n = Cw_n$. Но $w_n \to 0$, а $\exists\, c : \forall\, n\ \|t_n\|_1 > c$. Противоречие с ограниченностью C. $\blacksquare$

5.2. Service Pack 2 (Юра Малыхин)

5.2.1. Теорема Хана – Банаха

Первый случай, когда пространство сепарабельно, т.е. $\exists\,(x_n) \subset H$ плотное. Продолжаем F на $\langle X_0, x_1, \dots, x_n\rangle$ последовательно. Получим в итоге F на $\langle X, x_i\rangle$ — это плотное подмножество. Продолжим F по непрерывности: надо проверить корректность и что норма не испортится. Корректность: пусть $a_i, b_i \longrightarrow c$. Мы хотим положить $F(c) := \lim F(a_i)$. Т.к a_i фундаментальна, то и $F(a_i)$ тоже, поэтому предел существует; т.к $\|a_i - b_i\| \to 0$, то $|F(a_i) - F(b_i)| \leqslant \|F_0\| \cdot \|a_i - b_i\| \to 0$, т.е. пределы равны. Далее,

$$\|a_i\| \longrightarrow \|c\|, \quad |F(a_i)| \leqslant \|F_0\| \cdot \|a_i\|, \quad |F(a_i)| \to |F(c)|.$$

Отсюда $|F(c)| \leqslant \|F_0\| \cdot \|c\|$.

5.2.2. Спектральная теорема

Более подробно про построение U: сначала определяем U на всюду плотном множестве $\langle A^n h\rangle$ так: если $v = P(A)h$, то $Uv = P$. Корректность проверена (по определению меры σ). Изометрия проверена — это ровно то же тождество, только без равенства нулю. Значит, все продолжается на $C[-\|A\|, \|A\|]$, причем остается свойство изометричности. Отсюда следует инъективность U. Проверим сюръективность: берем $f \in L_2(\sigma)$ и строим многочлены $P_n \longrightarrow f$ (сходимость по норме L_2 - существование такой последовательности многочленов см. ниже - лемма). Берем $x_n = P_n(A)h$ - прообразы. В силу изометрии последовательность x_n фундаментальна и имеет предел x. Тогда $Ux = f$. Теперь нам надо доказать следующее равенство функций: $(UAU^{-1}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$. Если теперь $P_n \longrightarrow f$, то:

$$\lambda f(\lambda) \overset{1}{\longleftarrow} \lambda P_n(\lambda) \overset{2}{=} UAU^{-1}P_n \overset{3}{\longrightarrow} UAU^{-1}f.$$

1 означает сходимость по норме L_2, эта сходимость следует из того, что $\|\lambda P_n(\lambda) - \lambda f(\lambda)\|_2 \leqslant C\|P_n - f\|_2$, где $|\lambda| \leqslant C$.
2 следует из определения U
3 означает сходимость по норме L_2, она следует из непрерывности операторов U, U^{-1}, A.

Поскольку предел в L_2 единствен, левая часть равна правой.

Лемма 5.3. *Пусть σ — конечная борелевская мера на $[a, b]$ (т. е. она задана на борелевских подмножествах отрезка). Тогда многочлены плотны в $L_2(\sigma)$.*

□ Нам надо приблизить многочленами все функции из L_2. Поскольку все непрерывные приближаются многочленами равномерно, то приближаются и по норме L_2. Поскольку простые функции плотны в L_2, остается лишь приблизить непрерывными функциями индикаторы измеримых (=борелевских) множеств. Теперь рассмотрим те E, индикаторы которых приближаются непрерывными функциями, т.е. $F = \{E : \chi_E \in \overline{C[a, b]}\}$. Покажем, что F есть σ-алгебра. Действительно, если f_n приближают χ_E, то $1 - f_n$ приближают $\chi_{[a,b]\setminus E}$, если $f_n \rightarrow E_1$, $g_n \longrightarrow E_2$, то $f_n g_n \longrightarrow \chi_{E_1 \cap E_2}$, если есть счетное число непересекающихся E_i, то берем $f_1 : \|f_1 - \chi_{E_1}\| < \frac{1}{2}$, $f_2 : \|f_2 - \chi E_2\| < \frac{1}{4}$, и так далее. Тогда $\| \sum f_i - \chi_{E_1 \sqcup E_2 \sqcup \ldots}\| < 1$. Покажем, что в F входят полуинтервалы вида $[a, t)$. Такой интервал приближается функцией $f_n(x)$, которая есть 0 при $x \geqslant t$, 1 при $x \leqslant t - \frac{1}{n}$, концы соединяем по линейности. Действительно, тогда ошибка есть $\int_{[t-1/n,t)} |1 - f_n|^2 \leqslant \sigma([t - 1/n, t)) \longrightarrow 0$. Значит F содержит все борелевские множества, чего нам и надо было доказать. ■

5.2.3. Теорема Ф. Рисса

Утверждение 5.4. *Пусть для любой вещественнозначной f имеем $F(f) \in \mathbb{R}$. Покажем, что построенную функцию g можно выбрать окажется вещественной.*

Пусть для любой вещественнозначной неотрицательной f имеем $F(f) \geqslant 0$. Покажем, что g можно выбрать вещественной неубывающей.

□ Заметим, что мы используем теорему Рисса в несколько другой форме, а именно, пользуемся не самой функцией g, а мерой dg. Поэтому после того, как построили функцию конечной вариации g, изменим ее в счетном числе точек, чтобы представить в виде разности $g' = g_1' - g_2'$ функций распределения некоторых мер μ_2, μ_1 на $[a, b]$. Это делаем так: известно, что g есть разность $g = g_1 - g_2$ двух монотонных функций. Далее переопределим, если надо, g_1 и g_2 так, чтобы они стали непрерывны слева на (a, b). С точкой b происходит **жопа**. Тогда dg_1' и dg_2' — некоторые меры, поэтому интеграл по dg есть разность интегралов Лебега по мерам dg_1' и dg_2', а с интегралом Лебега работать намного приятнее! Техническое утверждение [2, гл. 6, § 6, п. 4] состоит в том, что для всякой непрерывной функции f значение интеграла не изменится, т.е. $\int f dg = \int f dg' = \int f dg_2' - \int f dg_1'$, где первые два интеграла понимаются в смысле Римана – Стилтьеса, а последние два — в смысле Лебега – Стилтьеса. Далее везде считаю функцию g подправленной. (Замечу, что рассуждения в этом параграфе необходимо проводить, чтобы получить именно меру в спектральной теореме!)

1) итак, пусть F вещественный. Сделаем $g(c) \in \mathbb{R}$ для какой-то фиксированной $c \in (a, b)$. Возьмем произвольное $d > c$ и докажем $g(d) \in \mathbb{R}$. Для этого построим последовательность «почти индикаторов» f_n, сходящихся почти всюду к $\psi = \chi_{[c,d)}$. Тогда $\int f_n dg_2 \longrightarrow \int \psi dg_2$ (из свойств интеграла Лебега), $\int f_n dg_1 \longrightarrow \int \psi dg_2$, откуда $\int f_n dg \longrightarrow \int \psi dg = g(d) - g(c)$. Поскольку слева стоят вещественные числа, то и предел получится вещественным. Аналогично доказывается $g(d) \in \mathbb{R}$ для $d < c$ и для $g(b)$. (Тут я сжульничал! На самом деле проблема имеется в точке b, по хорошему g_1 и g_2 должны быть непрерывны в точке b слева, но тогда нужно знать еще меру точки b, т. е. $g(b + 0) - g(b)$. Подробности слишком техничны и неинтересны)

2) Пусть F неотрицателен. Совершенно аналогично доказывается, что g монотонна. Выбирая g вещественной в какой-нибудь точке, получим вещественную монотонную функцию, которая будет функцией распределения некоторой меры (опять возникает небольшая проблема с мерой b). Эту меру и надо будет использовать в спектральной теореме. ■

5.2.4. Теорема о компактном возмущении

Контрпример, показывающий неравносильность определений непрерывного спектра: рассмотрим $A\colon \ell_2 \rightarrow \ell_2$, $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$. Он компактен, причем $0 \in \Sigma_c(A)$. Рассмотрим компактное возмущение $K = -A$: $A + K = A - A = 0$, но у нуля нет непрерывного спектра. По лемме (см. соотв. главу) из того, что

$\lambda \in \Sigma_c(A)$ следует существование некомпактная последовательности $\|x_n\| = 1$ и $(A - \lambda)x_n \to 0$. Обратно же неверно. Пример: $A = 0$, $\lambda = 0$, $h_n = e_n$ — ОНС.

5.3. Полезные утверждения, примеры, факты

5.3.1. К теореме Банаха – Штейнгауза

Покажем, что в принципе равномерной ограниченности нельзя убрать требование банаховости пространства X.

Пример 3.1. Пусть X — пространство финитных последовательностей, а $Y = \ell_1$. Определим семейство операторов так:

$$A_n(x_1, \ldots, x_n, \ldots) := (0, \ldots, nx_n, 0, \ldots).$$

Для каждой финитной последовательности $x = (x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$ найдётся нужная константа C_x: достаточно взять $C_x = N$. С другой стороны, $\|A_n\| = n \to \infty$ при $n \to \infty$.

5.3.2. К теореме Банаха об обратном операторе

Покажем, что полнота пространств в теореме Банаха существенна.

Пример 3.2. Пусть $X = \mathbf{C}[0,1]$ с чебышёвской нормой, а $Y = \mathbf{C}[0,1]$ с интегральной нормой. Тогда X полно, а Y, очевидно, нет. Рассмотрим тождественный оператор $\mathrm{id}\colon X \to Y$. Очевидно, $\|\mathrm{id}\| \leqslant 1$, но оператор id^{-1} не является ограниченным. В самом деле, рассмотрим $f_n := n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ и чуть-чуть их сгладим, чтобы они стали непрерывными. Тогда их интегральная норма будет близка к 1, а чебышёвская — неограниченно возрастать. Значит, id^{-1} не является ограниченным оператором.

Определение. Базис Гамеля — такая система векторов $\mathcal{B} \subset L$, что всякий вектор $x \in L$ единственным образом представляется в виде конечной линейной комбинации векторов из $\mathcal{B}$.

Теорема 5.5. *Всякое линейное пространство L обладает базисом Гамеля.*

□ Существенно использует аксиому выбора, поэтому в справедливость этой теоремы можно либо верить, либо не верить. ■

В предположении справедливости этой теоремы, можно легко построить пример неограниченного оператора в любом бесконечномерном пространстве. Пусть Γ — базис Гамеля пространства L. Выберем счётное подмножество среди базисных элементов и занумеруем их, получим набор $\{\gamma_i\}$. Считаем, что базисные вектора имеют единичную длину. Зададим действие оператора на базисных векторах: положим $A\gamma_i = i\gamma_i$, а для всех остальных базисных векторов $e \in \Gamma \setminus \{\gamma_i\}$ положим $Ae = 0$. Тем самым мы задали действие оператора на всех векторах пространства L, ибо всякий вектор единственным образом разлагается по нашему базису. Поэтому, если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$, то $Ax = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i A e_i$ и тем самым оно однозначно определено. Вместе с этим ясно, что оператор A неограничен, поскольку для всякого $M > 0$ найдётся вектор, который растягивается этим оператором больше, чем в M раз.

Пример 3.3. Из теоремы о базисе Гамеля следует, что на всяком бесконечномерном пространстве существует неограниченный линейный оператор. Аналогично строится и неограниченный линейный функционал, именно, возьмём $\varphi(\gamma_i) = i\,\|\gamma_i\|$, а на всех остальных векторах базиса положим его равным нулю. Тогда возьмём какое-нибудь полное пространство X и оснастим его другой нормой $\|\cdot\| := \|\cdot\|_L + \|\cdot\|_\varphi$, то есть положим $\|x\| := \|x\|_L + |\varphi(x)|$. Обозначим новое пространство через L_φ и рассмотрим неограниченный оператор $\mathrm{id}\colon L \to L_\varphi$. Рассмотрим оператор $\mathrm{id}\colon L_\varphi \to L$. Его норма, очевидно, не превосходит 1, однако обратный оператор неограничен, поскольку норма i-ого базисного вектора увеличивается в $(1 + i)$ раз.

Покажем что в теореме Банаха существенно требование существования алгебраического обратного отображения.

Пример 3.4. Возьмём оператор правого сдвига в пространстве ℓ_p. Он действует так:

$$Rx = R(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Понятно, что $\|R\| = 1$. Очевидно, что левый обратный оператор существует — это левый сдвиг L, причём он тоже ограничен. Но правого обратного не существует, поскольку $\operatorname{Im} R \neq \ell_p$, значит, не для каждого вектора будет выполнено равенство $RLx = x$.

5.3.3. Сопряжённый аналог ТБШ

Теорема 5.6 (Аналог принципа равномерной ограниченности для сопряжённых пространств). *Слабо ограниченная последовательность ограничена по норме.*

□ Пусть x_i — слабо ограниченная последовательность. Это значит, что для всякого $f \in X^*$ существует число C_f такое, что для $\forall\, i$ имеем $|f(x_i)| \leqslant C_f$. Докажем, что найдётся такое C, что $\|x_i\| \leqslant C$ для всех i.

Рассмотрим семейство множеств

$$F_n := \{f \in X^* \colon\ \forall\, i \text{ имеем } |f(x_i)| \leqslant n\}\,.$$

Очевидно, что $X^* = \bigcup F_n$. Поскольку X^* полно и потому не есть множество первой категории, найдётся F_N такое, что оно не является нигде не плотным в X^*. Значит, есть шар, где оно всюду плотно.

Покажем, что все множества F_n замкнуты. Для этого докажем, что дополнения к ним открыты. Возьмём какой-нибудь элемент $f \notin F_n$. Значит, $\exists\, j$, для которого имеем $\|f(x_j)\| > n$. Покажем, что найдётся окрестность элемента f, не пересекающаяся с F_n. Пусть $g \in X^*$, тогда

$$|(f+g)(x_j)| \geqslant |f(x_j)| - |g(x_j)|\,.$$

Поскольку набор множеств F_n покрывает всё пространство X^*, найдётся M, для которого имеем $g \in F_M$. Поэтому для всех i имеем $|g(x_i)| \leqslant M$. Рассмотрим функционал $h = \lambda g$. Поскольку M уже зафиксировано, число λ можно выбрать таким, чтобы для всех i число $|h(x_i)|$ было сколь угодно маленьким. Если это число выбрать правильно, то можно считать, что сохраняется неравенство

$$|(f+h)(x_j)| \geqslant |f(x_j)| - |h(x_j)| > n.$$

Действительно, $|f(x_j)| > n$, значит, можно отнять от него настолько маленькое число так, чтобы результат всё ещё был больше n. Это и означает, что искомая окрестность элемента f найдена.

По лемме, множество F_N содержит некоторый шар B. Достаточно установить равномерную ограниченность для функционалов в некотором шаре, содержащем начало координат. Пусть $\widetilde{B}$ — копия шара B с центром в начале координат. Каждый функционал $g \in \widetilde{B}$ можно представить как $f_1 - f_2$, где $f_i \in B$. В силу неравенства треугольника и определения множества F_N для всех i получаем $|g(x_i)| = |f_1(x_i) - f_2(x_i)| \leqslant N + N = 2N$.

Рассмотрим образ исходной последовательности в пространстве X^{**}. Докажем, что он ограничен. Но это только что было установлено, поскольку мы получили, что некоторое множество коковекторов равномерно ограничено на шаре с центром в начале координат. ■

5.4. Service Pack 3 (Юра Притыкин)

Доказательство леммы о слабой компактности шара в гильбертовом пространстве H без свойства сепарабельности:

Надо доказать, что из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Рассмотрим подпространство H_0, порожденное всеми элементами последовательности $\{x_n\}$, и замкнём его. Получим некоторое сепарабельное гильбертово подпространство в H. Оно не более чем счётномерно. Выберем в нем счетный базис и применим к нему доказанную лемму. Поэтому если мы можем найти такую последовательность в сепарабельном гильбертовом, то и в любом гильбертовом.