Математические модели экономики

В. В. Трофимов, А. А. Тужилин

28 сентября 2005

Лекция 1

1 Введение

Основной объект изучения — это математические модели, которые позволяют описывать и исследовать экономические системы и процессы.

Практические задачи моделирования условно делятся на три класса:

- анализ экономических систем;
- экономическое прогнозирование;
- выработка управленческих решений на всех уровнях экономических систем.

Отметим, что при построении моделей используются самые разнообразные разделы математики: теория графов, теория меры (вероятность, статистика), дифференциальные уравнения, динамические системы, геометрия, вариационное исчисление и т.д.

Имеются следующие основные типы математических моделей:

- дискретные и непрерывные;
- статические и динамические;
- линейные и нелинейные;
- оптимизационные, детерминированные, стохастические.

Поясним сказанное. Как правило, модель содержит параметры и переменные. Например, потребность предприятия в ресурсе зависит от величин двух различных видов: *норм расходов материалов* a_j и *объемов выпуска продукции* x_j. Здесь величины x_j — переменные, а a_j — параметры.

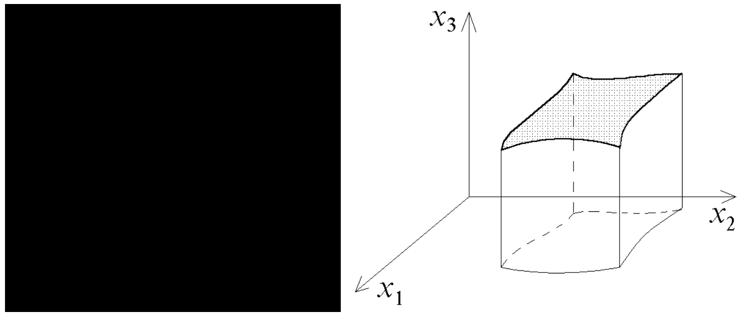

Рис. 1.1: Линейные и нелинейные ограничения

В некоторых случаях переменные могут принимать лишь целые неотрицательные значения (число рабочих на предприятии, число пошитых костюмов, число произведенных телевизоров и т.д.). Такие модели называются *дискретными.* Если же переменные принимают в определенных пределах любые неотрицательные значения (расход электроэнергии и воды, труд), то модель называют *непрерывной.*

Пусть в модели изучается зависимость ее параметров от времени. Такую модель будем называть *динамической.* Если же параметры от времени не зависят, то модель называется *статической.*

После того как определены параметры модели, необходимо указать множество X допустимых значений переменных. Это так называемые *ограничения модели.* Они могут быть как линейными, так и нелинейными, рис. 1.1. В соответствии с этим модели бывают *линейными* и *нелинейными.*

Рассмотрим теперь примеры *оптимизационных* задач. Эти задачи связаны с нахождением объектов, которые наилучшие в том или ином смысле. Например, отыскание *Парето-эффективных состояний* является такого типа задачей и ее можно сформулировать следующим образом. Если есть набор функций $f_1, \dots, f_n$, определенных на множестве W, то требуется найти такие точки $x \in W$ (*оптимумы Парето*), что не существует $x' \in W$ с $f_j(x') \geq f_j(x)$ для всех j и $f_i(x') > f_i(x)$ для некоторого i. Другой пример связан с нахождением максимальной прибыли при производстве и продаже некоторого товара. Эта проблема приводит к поиску экстремалей следующей вариационной задачи:

$$\int_a^b L(t, u(t), u'(t))\, dt \longrightarrow \mathrm{ext}\,.$$

Модель называется *детерминированной,* если ее поведение в будущем однозначно определяется состоянием в настоящий момент вре-

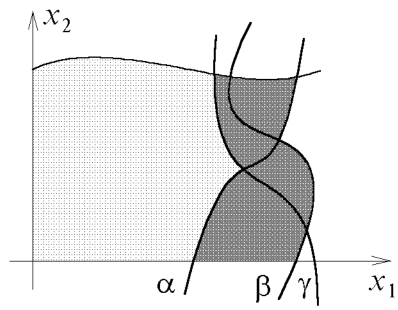

Рис. 1.2: Стохастические ограничения

мени. Такие модели, как правило, описываются системами дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_1, \dots, x_n),$$

$i = 1, \dots, n$, где $x_1, \dots, x_n$ — параметры системы. Если F_i — линейные функции, то мы имеем *линейную модель*, а в противном случае — это *нелинейная* модель.

Стохастические модели связаны, как правило, с предсказаниями тех или иных экономических событий при неопределенных условиях, например, при стохастических ограничениях на параметры, рис. 1.2. На этом рисунке серия кривых α, β, γ — случайные реализации стохастических ограничений.

При анализе экономических систем используются все указанные типы моделей. Если рассматривается динамическая модель, то основную роль играет понятие *траектории*, т.е. кривой в пространстве параметров, которую описывает точка при своем движении во времени. Важнейшим понятием здесь является фазовое пространство, которое в геометрии появляется как кокасательное расслоение T^*m к пространству параметров M, причем предполагается, что M — гладкое многообразие.

Анализ экономической системы состоит в том, что ее развитие рассматривается как движение в фазовом пространстве по некоторой траектории. Один из главных вопросов здесь — это вопрос об устойчивости траекторий. Для различных моделей в рамках этого класса задач важное место занимают задачи о магистралях. *Магистраль* — это траектория развития, на которой за длительное время достигается максимальная скорость роста экономики.

При экономическом прогнозировании часто используются стохастические модели и методы математической статистики. Прогноз

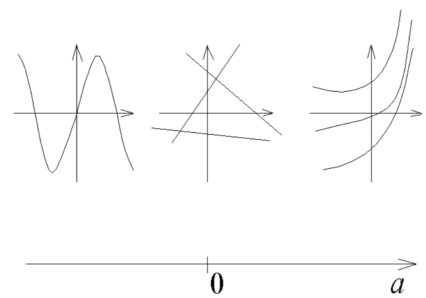

Рис. 1.3: Перестройка фазового портрета

представляет собой научно обоснованное суждение о возможных состояниях экономической системы в будущем или об альтернативных путях и сроках достижения этих состояний.

В этом классе задач важное значение имеет так называемая *теория катастроф*, связанная с изучением внезапных изменений в экономических системах при медленных внешних влияниях. Методы анализа таких ситуаций были развиты французским математиком Рене Томом. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = a\,x,$$

зависящее от параметра $a \in \mathbb{R}$. Если $a < 0$, то решения периодические — линейные комбинации вида

$$c_1 \sin\sqrt{|a|}\,t + c_2 \cos\sqrt{|a|}\,t.$$

Если $a = 0$, то решения имеют вид линейных функций

$$x(t) = c_1\,t + c_2.$$

Если $a > 0$, то решения имеют экспоненциальный рост — линейные комбинации вида

$$c_1\,e^{\sqrt{a}\,t} + c_2\,e^{-\sqrt{a}\,t}$$

Итак, при $a = 0$ происходит скачкообразная перестройка фазового портрета, рис. 1.3.

При изучении задач выработки управленческих решений используются фундаментальные понятия *управления* и *управляющего параметра*. Отметим здесь только один класс задач оптимального управления. Для модели, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, u),$$

требуется найти такое значение $u = u^*$ параметра управления u, что функционал

$$J = \int_a^b L(x, u)\, dt$$

принимает наименьшее значение.

В курсе мы не будем заниматься интерпретацией результатов, которые получаются при исследовании той или иной модели (это связано с политикой).

Следует иметь в виду, что в настоящее время имеется много экономико-математических моделей, но никакие из них, в рамках нашего курса, *не будут* воздвигаться в ранг абсолютных, например, модель административно-командной системы или модель рыночной экономики.

Заметим также, что экономико-математические модели строятся в рамках понятий мира идеальных объектов (виртуальная действительность), а не в реальном мире материальных благ и отношений.

2 Пространство товаров

2.1 Арифметическое пространство товаров

Товар представляет собой вещь или услугу, имеющую положительную общественную полезность. Он характеризуется своими физическими свойствами, а также временем и местом, где он доступен.

Количество товара может быть выражено числом. Товары будем считать неограниченно делимыми, т.е. количество товара может быть выражено любым неотрицательным вещественным числом.

Предположим, что имеется конечное число различных товаров $A_1, \ldots, A_n$ в количестве $x_1, \ldots, x_n$. Набор товаров характеризуется строчкой $(x_1, \ldots, x_n)$ длины n.

Напомним определение арифметического пространства, с которым будут связаны в дальнейшем все основные конструкции.

Определение. Множество всех строк длины n, составленных из действительных чисел, будем называть (вещественным *арифметическим пространством* и обозначать его символом $\mathbb{R}^n$. Итак,)

$$\mathbb{R}^n = \{\, (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n \,\}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется естественная *линейная структура*, задаваемая с помощью операций

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Эти операции определяют в пространстве $\mathbb{R}^n$ структуру линейного пространства, т.е. они удовлетворяют следующим свойствам:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ для любых векторов $x, y, z \in \mathbb{R}^n$;

2. $x + y = y + x$ для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$;

3. существует такой элемент $0 \in \mathbb{R}^n$, что $x + 0 = 0 + x = x$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$;

4. для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ существует такой вектор $-x \in \mathbb{R}^n$, что $(-x) + x = x + (-x) = 0$;

5. $\lambda(\mu\, x) = (\lambda\mu)x$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

6. $(\lambda + \mu)\, x = \lambda\, x + \mu\, x$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

7. $\lambda(x + y) = \lambda\, x + \lambda\, y$ для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$;

8. $1 \cdot x = x$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$.

В качестве элемента 0 можно взять $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, а в качестве $-x$ можно взять вектор $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$.

Множество

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x = (x_1, \dots, x_n),\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n\}$$

называется *положительным ортантом*, а множество $R^n_- = -\mathbb{R}^n_+$ — отрицательным ортантом.

Определение. Множество $\mathbb{R}^n_+$, а также пространство $\mathbb{R}^n$ будем называть *пространством товаров*.

На рис. 1.4 изображены пространства товаров в случае одного, двух и трех товаров.

2.2 Множество потребления

План потребления некоторого участника экономики указывает количество каждого из потребляемых им товаров и количество труда (возможно, несколько их видов), которое он предлагает.

Примем следующее соглашение. Количество товара, предлагаемого участником экономики, будем обозначать *отрицательным* числом, а

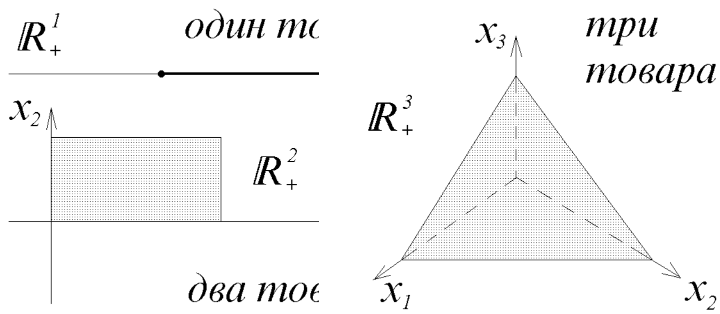

Рис. 1.4: Пространства товаров

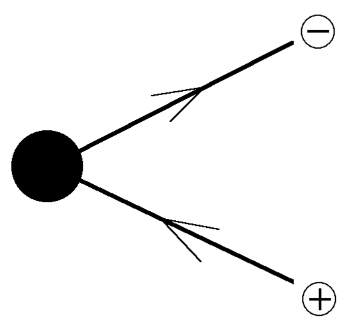

Рис. 1.5: Количество товара со знаком

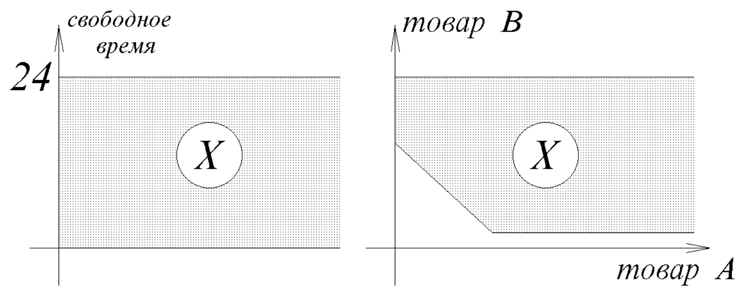

Рис. 1.6: Типичные множества потребления

количество товара, которое должно быть предоставлено ему, *положительным*, рис. 1.5.

Таким образом, план потребления — это некоторый вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество всех планов потребления данного участника экономики назовем *множеством потребления* или *потребительским множеством*. На рис. 1.6 приведены типичные множества потребления.

Часто множество потребления удовлетворяет дополнительным условиям, таким как выпуклость, замкнутость, ограниченность. Напомним определения этих свойств.

Определение. Подмножество $C \subset \mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если $\lambda\, x + (1-\lambda)\, y \in C$ для всех $x, y \in C$ и $0 \le \lambda \le 1$.

Так, например, стандартный единичный куб $K \subset \mathbb{R}^n$, а также открытый и замкнутый шары $O(a,r) \subset \mathbb{R}^n$ и $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в $a = (a_1, \ldots, a_n)$, определенные как

$$K = \{\,(x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, \ldots, n\,\},$$

$$O(a,r) = \{\,(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2\,\},$$

$$B(a,r) = \{\,(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \le r^2\,\},$$

выпуклы.

Далее, множество $C \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если для любой точки $a \in C$ существует открытый шар $O(a,r)$ некоторого радиуса r с центром в a, такой что $O(a,r) \subset C$. Примерами открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$ могут служить открытый шар $O(a,r)$ и открытый куб

$$\overset{\circ}{K} = \{\,(x_1,\dots,x_n) \mid 0 < x_i < 1,\ i = 1,\dots,n\,\},$$

Отметим, что замкнутый куб K и замкнутый шар $B(a,r)$ не являются открытыми множествами (докажите), тем не менее, их дополнения в $\mathbb{R}^n$, т.е. множества $\mathbb{R}^n \setminus K$ и $\mathbb{R}^n \setminus B(a,r)$ — открыты.

Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если его дополнение в $\mathbb{R}^n$, т.е. множество $\mathbb{R}^n \setminus F$, открыто. Замкнутый куб K и замкнутый шар $B(a,r)$ являются замкнутыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$ в смысле только что данного определения.

Открытые и замкнутые множества обладают следующими свойствами.

1. Пустое множество $\emptyset$ и все $\mathbb{R}^n$ являются оба и открытыми, и замкнутыми множествами.

2. Пересечение конечного числа открытых множеств само является открытым множеством.

3. Объединение любого (не обязательно конечного) числа открытых множеств само является открытым множеством.

4. Пересечение любого (не обязательно конечного) числа замкнутых множеств само является замкнутым множеством.

5. Объединение конечного числа замкнутых множеств само является замкнутым множеством.

Рассмотрим теперь понятие ограниченности. Подмножество $C \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным снизу*, если существует такой вектор $b = b_1,\dots,b_n$, что для любого $x \in C$ выполняется $x_i \geq b_i$ при каждом $i = 1,\dots,n$. Меняя в формуле $x_i \geq b_i$ знак $\geq$ на $\leq$, получаем определение множества C, *ограниченного сверху*. Множество $C \subset \mathbb{R}^n$, ограниченное одновременно снизу и сверху, называется просто *ограниченным*. Эквивалентная формулировка: множество C ограничено, если существует шар $B(a,r)$, такой что $C \subset B(a,r)$ (докажите). В качестве примеров ограниченных множеств рассмотрим положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$ (ограничен снизу), отрицательный ортант $\mathbb{R}^n_-$ (ограничен сверху) и куб K (ограничен).

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения. Пусть $x = (x_1,\dots,x_n)$. Тогда будем писать $x \geq 0$, если $x_i \geq 0$ для всех $i = 1,\dots,n$; $x >> 0$, если $x_i > 0$ для всех $i = 1,\dots,n$; и, наконец, $x > 0$, если $x \neq 0$ и $x \geq 0$.

Отметим, что перечисленные только что ограничения на множество потребления данного участника экономики часто носят физический характер и обуславливаются внешней средой. Так, например, существует универсальная константа b, такая что человек в течение дня не может потребить (съесть) больше хлеба, чем b. Или, например, если мы рассматриваем потребление x свободного времени, измеряемое в часах, то $x \leq 24$, т.е. в день нельзя отдохнуть больше 24 часов.

Помимо физических ограничений, участник экономики (в дальнейшем называемый *потребителем*) сталкивается с экономическими ограничениями: его выбор ограничивается теми потребительскими наборами, которые он может себе позволить. *Доступность* потребительского набора зависит от двух вещей: его рыночной цены $p = (p_1, \dots, p_n)$ и уровня богатства w потребителя, т.е. от его *капитала*.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — количества товаров $A_1, \dots, A_n$, и пусть $p = (p_1, \dots, p_n)$ — цены единицы этих товаров. Вектор $p = (p_1, \dots, p_n)$ называется *системой цен*.

Отметим, что если задана система цен $p_1, \dots, p_n$, то величина $x_j = \dfrac{p_i}{p_j} x_i$ равна количеству товара A_j, который можем купить, продав товар x_j при существующих ценах.

Далее, если $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ — два вектора из $\mathbb{R}^n$, то через $x \cdot y$ будем обозначать их *скалярное произведение*:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Определение. *Вальрасовым*, или *конкурентным бюджетным множеством* потребителя $B_{p,w}$ называется множество всех осуществимых потребительских наборов при рыночной цене p для потребителя с капиталом w. Иными словами,

$$B_{p,w} = \{\, x \in \mathbb{R}^n_+ \mid p \cdot x \leq w \,\}.$$

Если учесть еще и физические ограничения на множество потребления X, то мы получим бюджетное множество $B_{p,w}(X)$, определяемое так:

$$B_{p,w}(X) = \{\, x \in X \mid p \cdot x \leq w \,\}.$$

Лекция 2

Элементы теории потребления

1 Введение

В данной лекции мы будем изучать проблему потребительского спроса, делая лишь самые общие предположения об индивидуальных свойствах и характере потребителя. Будем предполагать, что имеется один потребитель, задача которого — рационально распределить личный бюджет.

На прошлой лекции мы ввели понятие пространства товаров $\mathbb{R}^n_+$ и $\mathbb{R}^n$ (ассортиментный набор товаров), а также понятие множества потребления $X \subset \mathbb{R}^n$ (множества всех мыслимых наборов товаров, доступных потребителю и пригодных для него).

В настоящей лекции мы введем на множестве потребления так называемое отношение предпочтения, выражающее приоритеты потребителя. Иными словами, потребитель может сравнить любые два набора товара и сделать из них выбор в зависимости от своего вкуса, бюджета и цен на эти товары. Это сравнение и задается отношением предпочтения. Заметим, что некоторые наборы товаров могут оцениваться потребителем как одинаково предпочтительные или эквивалентные, что порождает на множестве потребления другое отношение, называемое отношением эквивалентности.

Далее, мы рассмотрим функцию полезности, определенную на множестве потребления, в терминах которой удобно описываются отношения предпочтения. Естественно, при имеющихся физических и бюджетных ограничениях, потребитель стремится выбрать те наборы то-

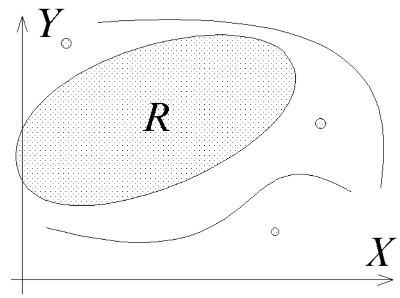

Рис. 2.1: Иллюстрация понятия отношения

варов, которые для него наиболее предпочтительны. Этот выбор потребителя описывается так называемой функцией спроса, являющейся, вообще говоря, многозначным отображением. Природа многозначности функции спроса состоит в том, что для данного потребителя, вообще говоря, может существовать несколько наиболее предпочитаемых наборов товаров, доступных потребителю при всех имеющихся ограничениях.

Заметим, что отношение предпочтения, отношение эквивалентности, понятие функции и многозначного отображения имеют одну и ту же природу, и возникают в рамках теории отношений, к изложению основ которой мы сейчас перейдем.

2 Отношения

Пусть X и Y — два произвольных множества, и $X \times Y$ — их декартово произведение, т.е. множество пар (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$.

Определение. Произвольное подмножество R множества $X \times Y$ называется (бинарным) *отношением*. Если $X = Y$, то говорят, что R — отношение на множестве X, рис. 2.1.

Часто условие того, что $(x, y) \in R$ обозначают через xRy.

Существует много способов задания отношений. Например, если R — отношение на конечном множестве X, то R можно задать квадратной матрицей $M = (m_{ij})$ следующим образом. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, тогда

$$\begin{cases} m_{ij} = 1, & \text{если } (x_i, x_j) \in R, \\ m_{ij} = 0, & \text{если } (x_i, x_j) \notin R. \end{cases}$$

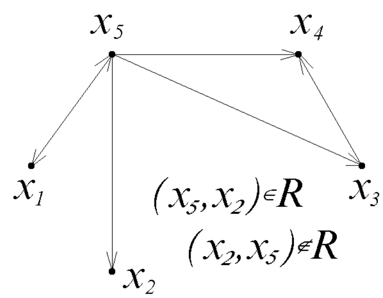

Рис. 2.2: Задание отношения ориентированными графами

Другой способ задания отношений в этом случае состоит в построении ориентированного графа G, множество вершин которого совпадает с $\{x_1, \ldots, x_n\}$, и пара вершин x_i и x_j из G соединена ориентированным ребром (x_i, x_j) если и только если $(x_i, x_j) \in R$, рис. 2.2

Пусть X и Y — произвольные множества, и $R \subset X \times Y$ — отношение.

Областью определения отношения R называется множество

$$D(R) = \{x \in X \mid \exists y \in Y,\ (x, y) \in R\},$$

а *областью значений* отношения R — множество

$$I(R) = \{y \in Y \mid \exists x \in X,\ (x, y) \in R\}.$$

Если $x \in X$, то через $R(x)$ будем обозначать множество

$$\{y \in Y \mid (x, y) \in R\},$$

и называть его *образом точки* $x \in X$. Отметим, что, вообще говоря, образ $R(x)$ может быть пустым множеством.

Если $A \subset X$ — произвольное подмножество из X, то через $R(A)$ обозначим подмножество в Y вида

$$\cup_{x \in A} R(x)$$

и назовем его *образом подмножества* $A \subset X$. Рисунок 2.3 иллюстрирует все введенные определения.

Если $D(R) = X$, то отношение R называется *многозначным отображением.* Многозначное отображение называется *однозначным отображением* или просто отображением, если образ $R(x)$ каждой точки $x \in X$ состоит ровно из одного элемента. Отображения R обычно обозначают через $R : X \to Y$ и говорят, что R *отображает множество*

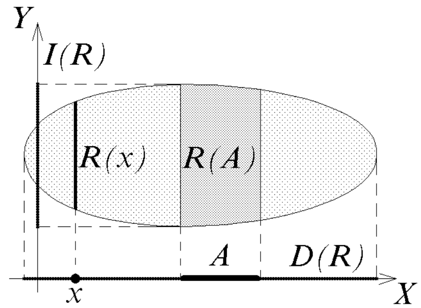

Рис. 2.3: Области определения и значения, а также образы отношений

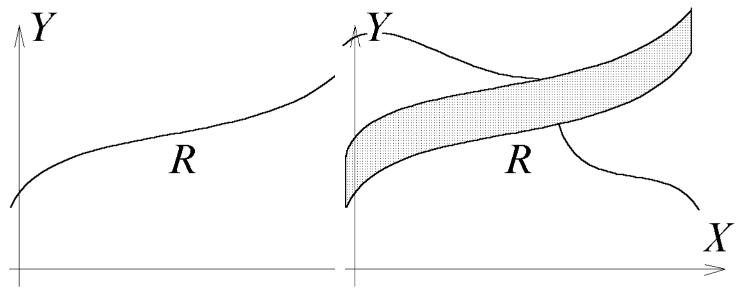

Рис. 2.4: Однозначные и многозначные отображения

X *во множество* Y. Чтобы различать однозначные и многозначные отображения, мы будем обозначать последние через $R : X \Rightarrow Y$. На рисунке 2.4 приведены примеры однозначных и многозначных отображений.

Понятие отношения является слишком общим. Чтобы оно стало содержательным, на него накладываются различные ограничения. Приведем определения основных из них в предположении, что $X = Y$.

Итак, пусть R — отношение на произвольном множестве X. Отношение R называется

1) *рефлексивным*, если $\forall x \in X,\ (x, x) \in R$, рис. 2.5;

2) *иррефлексивным*, если $\forall x \in X,\ (x, x) \notin R$, рис. 2.5;

3) *симметричным*, если $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$, рис. 2.6;

4) *асимметричным*, если $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$ и $x \neq y$, рис. 2.7;

5) *антисимметричным*, если $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ влечет $x = y$, рис. 2.7;

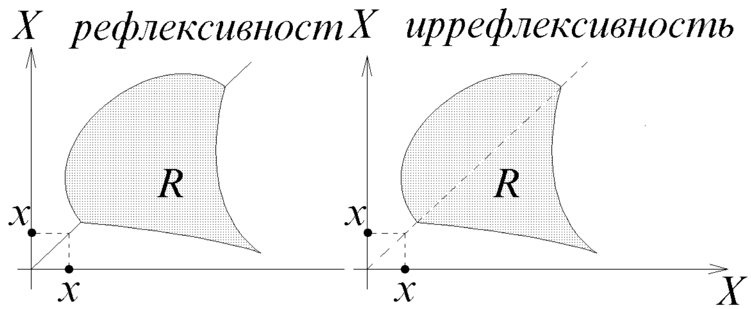

Рис. 2.5: Рефлексивное и иррефлексивное отношения

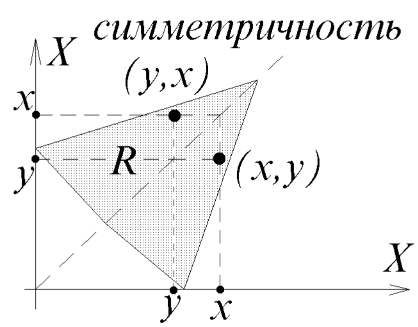

Рис. 2.6: Симметричное отношение

6) *транзитивным*, если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$, рис. 2.8;

7) *полным*, если $\forall (x, y)$ имеем: или $(x, y) \in R$, или $(y, x) \in R$, или то и другое, рис. 2.9.

Если R рефлексивно, симметрично и транзитивно, то R называется *отношением эквивалентности*. Если же R рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, то R называется (частичным) *порядком*. Полный частичный порядок называется *линейным порядком*. Стандартный пример частично упорядоченного множества — это множество всех подмножеств данного множества X, на котором порядок задается так: $A \leq B$ если и только если $A \subset B$. Если X состоит более чем из одного элемента, то этот частичный порядок не является линейным. Пример линейного порядка — стандартное отношение $\leq$ на вещественных числах.

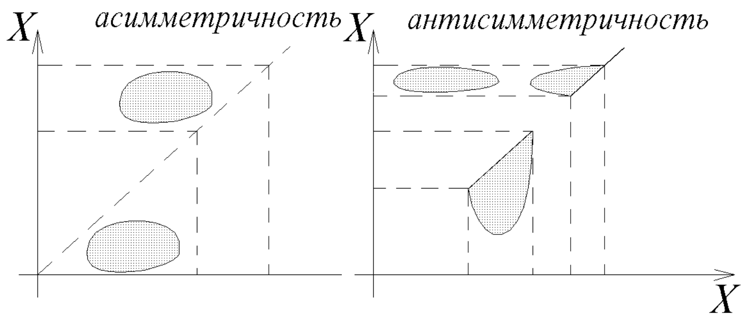

Рис. 2.7: Асимметричное и антисимметричное отношения

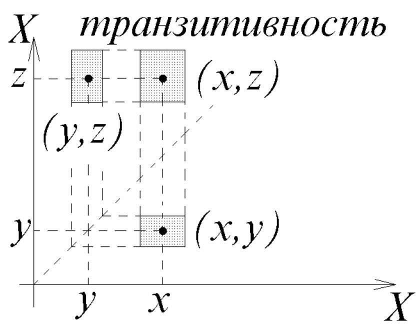

Рис. 2.8: Транзитивное отношение

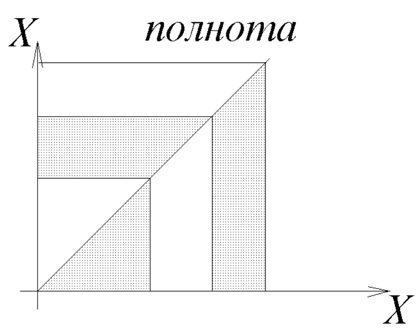

Рис. 2.9: Полное отношение

3 Отношение предпочтения и функция полезности

Перейдем теперь к определению отношения предпочтения.

Определение. *Отношением предпочтения* называется отношение на множестве потребления, являющееся рефлексивным, транзитивным и полным. Такое отношение будем обозначать через $\succcurlyeq$.

Замечание. Отношение предпочтения отличается от линейного порядка отсутствием аксиомы антисимметричности.

Примером рефлексивного, транзитивного и полного отношения $\succcurlyeq$ является отношение на $\mathbb{R}^n$, заданное произвольной функцией $f(x)$ следующим образом: $x \succcurlyeq y$ если и только если $f(x) \geq f(y)$ (докажите).

Введем следующее соглашение. Если $x \succcurlyeq y$, но $y \not\succcurlyeq x$, будем писать $x \succ y$; если же одновременно $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq x$, то будем писать $x \backsim y$. В действительности, отношение $\backsim$ является эквивалентностью (докажите).

Помимо трех перечисленных основных аксиом, на отношение предпочтения накладывают ряд других аксиом, главными из которых являются непрерывность, локальная ненасыщаемость и просто ненасыщаемость. Прежде чем дать точные определения, напомним некоторые факты из топологии.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — множество потребления. Определим на X открытые множества (т.е. топологию) как пересечения открытых множеств в $\mathbb{R}^n$ с множеством X (индуцированная топология). Иными словами, $A \subset X$ является открытым в X если и только если существует такое открытое в $\mathbb{R}^n$ множество $B \subset \mathbb{R}^n$, что $A = B \cap X$. Таким образом, мы превратили X в топологическое пространство.

Далее, если X и Y — топологические пространства, то на декартовом произведении $X \times Y$ топология определяется так: множество $A \subset X \times Y$ открыто если и только если его можно представить в виде объединения множеств вида $A_X \times A_Y$, где $A_X \subset X$ и $A_Y \subset Y$ — открытые множества.

Определение. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ называется *непрерывным*, если множество $\{(x, y) \mid x \succ y\}$ является открытым подмножеством декартова произведения $X \times X$.

Замечание. Непрерывность отношения предпочтения означает следующее. Если набор товаров x строго предпочтителен, чем набор товаров y, то при малом изменении каждого из этих наборов отношение строгого предпочтения сохраняется: если x' достаточно близко к x, а y' достаточно близко к y, то $x' \succ y'$.

Отношение предпочтения часто бывает удобно задавать функциями, называемыми функциями полезности.

Определение. Функция $u(x)$, определенная на множестве потребления X, называется *функцией полезности, соответствующей отношению предпочтения* $\succcurlyeq$, если $u(x) \geq u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succcurlyeq y$.

Приведем без доказательства теорему существования функции полезности. Напомни, что подмножество A топологического пространства называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Например, отрезок $[a, b]$ связен, а множество $[0, 1] \cup [2, 3]$, являющееся объединением двух непересекающихся отрезков, — нет (докажите).

Теорема 2.1 (Дебре) *Если множество потребления X связно, а отношение предпочтения непрерывно, то существует непрерывная функция полезности, соответствующая этому отношению предпочтения.*

Замечание. Пусть $u(x)$ — функция полезности для отношения предпочтения $\succcurlyeq$. Тогда для любой строго возрастающей функции $f(t)$ функция $f(u(x))$ также является функцией полезности для $\succcurlyeq$. Обратно, любые две функции полезности $u(x)$ и $v(x)$ для одного и того же отношения предпочтения $\succcurlyeq$ отличаются друг от друга на некоторую строго возрастающую функцию $f(t)$, т.е. $v(x) = f(u(x))$ для некоторой строго возрастающей функции $f(t)$. (Докажите.)

Определение. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на множестве потребления X называется локально ненасыщенным, если для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой $y \in X$, что $||y - x|| < \varepsilon$ и $y \succ x$. Сформулированное ограничение на отношение предпочтения называется *аксиомой локальной ненасыщаемости.*

Замечание. На языке функции полезности $u(x)$ локальная ненасыщаемость означает, что функция $u(x)$ не имеет локальных максимумов на X.

Заметим также, что для выполнения свойства локальной ненасыщаемости достаточно потребовать монотонность отношения предпочтения $\succcurlyeq$,

$$y >> x \Rightarrow y \succ x.$$

Это более сильное условие носит название *аксиомы ненасыщаемости.*

4 Функция спроса

Выше мы рассмотрели поведение потребителя, свободного от бюджетных ограничений. Пусть теперь бюджетные ограничения имеются. Сейчас мы построим многозначное отображение $\Phi(p, w)$, определенное на $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}^n_+$ — пространство систем цен p, а $\mathbb{R}_+$ — всевозможные величины капитала w. Область значений отображения $\Phi(p, w)$ лежит во множестве потребления. Отображение $\Phi(p, w)$ будет соответствовать поведению потребителя, выбирающего, при имеющихся ценах и бюджетных ограничениях, наиболее подходящие для него наборы товаров (отображение многозначно, так как при заданных ценах может существовать много равноценных товарных наборов). Отображение $\Phi(p, w)$ называется функцией спроса.

Предположим, что фиксированы цены $p \in \mathbb{R}^n_+$ на товары, функция полезности $u(x)$, определенная на множестве потребления X, и капитал w потребителя. Напомним, что через $B_{p,w}(X)$ мы обозначали бюджетное множество, т.е. множество всевозможных наборов товаров, доступных потребителю при ценах p:

$$B_{p,w}(X) = \{x \mid x \in X,\ x \cdot p \leq w\}.$$

Для каждого вектора $p \in \mathbb{R}^n_+$ и каждого значения w рассмотрим множество $\Phi(p, w)$, равное или пустому множеству если $u(x)$ не достигает максимума на $B_{p,w}(X)$, или множеству всех тех $x \in B_{p,w}(X)$, в которых этот максимум достигается. Тем самым мы определили многозначное отображение Φ из некоторого подмножества пространства $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ во множество потребления $X \subset \mathbb{R}^n_+$. Это многозначное отображение называется *функцией спроса* или *вальрасовой функцией*.

Отметим, что вальрасова функция $\Phi(p, w)$ является однородной степени 0, т.е. для любого $\lambda > 0$ имеем:

$$\Phi(\lambda p, \lambda w) = \Phi(p, w).$$

Это означает, что при изменении цен и благосостояния в одинаковой пропорции, потребительский выбор индивидуума не меняется. Иными словами, выбор потребителя зависит лишь от соотношения цен на различные товары, но не от масштаба цен.

Часто предполагают, что капитал w зависит от цен p, т.е. является функцией $w(p)$. Тогда возникает многозначное отображение $\Phi(p) = \Phi(p, w(p))$, также называемое *функцией спроса* или *вальрасовой функцией*. Однако теперь это отображение действует из $\mathbb{R}^n_+$ в $X \subset \mathbb{R}^n_+$. Один из интересных классов функций $w(p)$ возникает, если потребовать, чтобы функция $w(p)$ была однородной первой степени. Это озна-

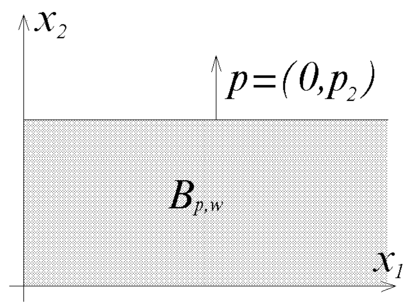

Рис. 2.10: Почему функция спроса определена не везде

чает, что для любого $\lambda > 0$ имеем: $w(\lambda p) = \lambda\, w(p)$. Подчеркнув зависимость бюджетного множества $B_{p,w(p)}$ лишь от систем цен p, обозначим его через $\hat{X}(p)$. Условие однородности степени 1 капитала $w(p)$ приводит к тому, что бюджетное множество $\hat{X}(p)$ становится однородным степени 0, т.е.

$$B_{\lambda p, w(\lambda p)} = B_{p,w(p)}, \text{ или } \hat{X}(\lambda p) = \hat{X}(p),$$

поэтому $\Phi(\lambda p) = \Phi(p)$, т.е. функция $\Phi(p)$ вновь является однородной степени 0. Эти следствия из описанного только что ограничения на капитал $w(p)$ могут быть интерпретированы так. выбор потребителя зависит лишь от соотношения цен на различные товары, но не от масштаба цен.

Вообще говоря, функция спроса определена не на всем $\mathbb{R}^n_+$. Основной причиной этого является неограниченность множества $B_{p,w}(\mathbb{R}^n_+)$ при условии, что одна из компонент вектора p, т.е. одна из цен p_i, равна нулю. Например, если $X = \mathbb{R}^n_+$, функция полезности $u(x)$ строго монотонно возрастает вдоль каждой из координат, и $w > 0$, то при $p = (0, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ множество $B_{p,w}(X)$ неограничено и функция полезности $u(x)$ не достигает максимума на $B_{p,w}(X)$, см. рис. 2.10.

Вышесказанное приводит к следующей естественной аксиоме, обычно накладываемой дополнительно на множество потребления X: если в последовательности $x^k \in X$ некоторая компонента x^k_j стремится к бесконечности при $k \to \infty$, то стремятся к бесконечности и все прочие координаты вектора x^k. Другими словами, если потребителю требуется слишком много одного товара, то он хочет и больших количеств всех остальных интересующих его товаров. Эту аксиому можно понимать как усиление требования о насыщаемости.

Если только что описанная аксиома имеет место, то при любом ненулевом векторе цен множество $B_{p,w}(X)$ ограничено, рис. 2.11 (до-

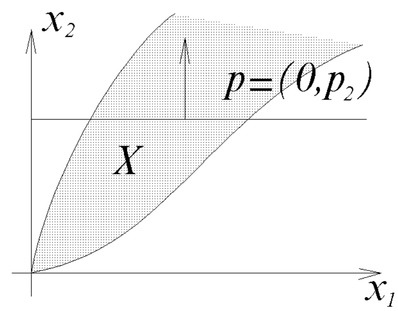

Рис. 2.11: Усиление требования ненасыщаемости

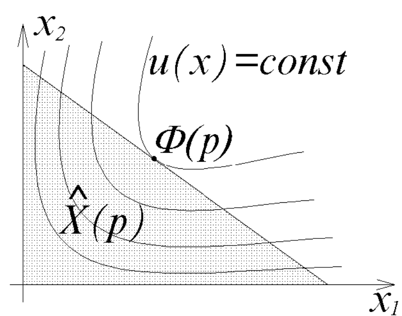

Рис. 2.12: Линии уровня строго вогнутой функции полезности

кажите).

Итак, мы построили функцию спроса, которая описывает поведение потребителя. Окончательный выбор потребителя состоит в указании $x \in \Phi(p, w)$.

При построении той или иной частной модели экономики часто делают различные предположения относительно отображений $\Phi(p)$ и $\Phi(p, w)$. Иногда считают, что эти отображения однозначны. Для этого достаточно потребовать, например, строгой вогнутости функции полезности: для любых $x, x' \in X$ и любого $y \in X$, лежащего внутри отрезка $[x, x']$, т.е. имеющего вид $(1-\lambda)x + \lambda x'$ для некоторого $\lambda \in (0, 1)$, выполняется $u(y) > (1 - \lambda)u(x) + \lambda u(x')$, рис. 2.12.

5 Основные задачи классической теории потребления

Рассмотрим две основные задачи классической теории потребления.

A) Задача максимизации полезности (UMP): для известной функции полезности требуется найти наиболее предпочтительный потребительский набор при данном капитале $w > 0$ и ценах $p >> 0$. Иными словами, построить вальрасову функцию $\Phi(p, w)$.

B) Задача минимизации затрат (EMP): при известных ценах $p >> 0$ вычислить минимальный уровень капитала w, требуемый для достижения заданного уровня полезности $u > u(0)$. Функция $h(p, u)$, ставящая в соответствие каждой пере (p, u) множество тех $x \in X$, на которых достигается этот оптимальный уровень затрат, называется *функцией Хикса*.

На семинаре мы рассмотрим более подробно свойства функций Вальраса и Хикса.

Лекция 3

Неоклассическая теория спроса. Уравнения Слуцкого

В данной лекции мы будем изучать поведение потребителя, стесненного бюджетными ограничениями.

Будем считать, что потребительское множество X совпадает со всем $\mathbb{R}^n_+$, а функция полезности $u(x)$ гладкая и удовлетворяет следующим ограничениям:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \quad \lim_{x_i \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty, \quad \lim_{x_i \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\text{гессиан } U(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) \text{ отрицательно определен } \forall x \in X.$$

Обозначим через p систему цен, а через K — капитал потребителя. Из свойств функции $u(x)$ вытекает, что функция спроса $\Phi(p, K)$ является однозначной, и при заданных p и K единственное значение $x^*(p, K)$ функции $\Phi(p, K)$ определяется следующей задачей математического программирования:

$$\begin{gathered} u(x) \to \max \\ \langle p, x \rangle = K, \quad x \geq 0 \end{gathered}$$

(докажите). Кроме того, из этих же свойств вытекает, что $x^*(p, K) \gg 0$, поэтому для определения точки $x^*(p, K)$ можно воспользоваться теоремой Лагранжа. Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = u(x) - \lambda\big(\langle p, x\rangle - K\big).$$

Тогда существует такое λ^*, что

$$\langle p, x^*\rangle - K = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) - \lambda^* p_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.2}$$

Отметим, что уравнение (3.2) — это условие того, что бюджетная плоскость касается поверхности уровня функции полезности (градиент функции полезности сонаправлен с нормалью p к бюджетной плоскости).

Теперь рассмотрим влияние изменения цены ровно одного продукта, скажем p_n, на поведение потребителя. Для этого продифференцируем полученные уравнения по p_n. Имеем:

$$\langle p, \frac{\partial x^*}{\partial p_n}\rangle = -x_n^*, \tag{3.3}$$

$$U\,\frac{\partial x^*}{\partial p_n} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n}\,p = (0, \dots, 0, \lambda^*) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Lambda^*. \tag{3.4}$$

Воспользовавшись невырожденностью матрицы U (она невырождена в силу ее отрицательной определенности), выразим из уравнения (3.4) $\partial x^*/\partial p_n$ и подставим полученное значение в уравнение (3.3), откуда найдем $\partial\lambda^*/\partial p_n$:

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} = -\frac{x_n^* + pU^{-1}\Lambda^*}{p\,U^{-1}\,p}.$$

Обозначим величину $-\big(pU^{-1}p\big)^{-1}$ через μ, и для каждой матрицы M пусть $[M]^{(i)}$ обозначает ее i-ый столбец. Легко видеть, что $U^{-1}\Lambda^* = \lambda^*[U^{-1}]^{(n)}$. Поэтому полученную формулу можно переписать компактней так:

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} = \mu x_n^* + \mu\lambda^* p[U^{-1}]^{(n)}.$$

Пусть z обозначает вектор $[U^{-1}]^{(n)}$ (т.е. z — это n-ый столбец матрицы U^{-1}). Тогда

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} = \mu x_n^* + \mu\lambda^*\langle z, p\rangle.$$

Отсюда непосредственно получаем формулу для $\partial x^*/\partial p_n$:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} = \mu x_n^*\,U^{-1}p + \lambda^*\Big(\mu\langle p, z\rangle U^{-1}p + z\Big). \tag{3.5}$$

Придадим теперь правой части уравнения (3.5) экономический смысл. Для этого дадим экономическую интерпретацию каждого из двух слагаемых правой части.

Чтобы выяснить смысл первого слагаемого, рассмотрим, что происходит с решением $x^*(p, K)$, если цены p остаются неизменны, а капитал K меняется. Продифференцируем уравнения (3.1) и (3.2) по K, получим:

$$\langle p, \frac{\partial x^*}{\partial K} \rangle = 1, \tag{3.6}$$

$$U\frac{\partial x^*}{\partial K} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial K}p = 0. \tag{3.7}$$

Выражая из уравнения (3.7) величину $\partial x^*/\partial K$ и подставляя полученное значение в уравнение (3.6), найдем $\partial \lambda^*/\partial K$:

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial K} = \frac{1}{pU^{-1}p} = -\mu,$$

откуда

$$\frac{\partial x^*}{\partial K} = -\mu U^{-1}p, \tag{3.8}$$

поэтому

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} = -\frac{\partial x^*}{\partial K}x_n^* + \lambda^*\Big(\mu\langle p, z\rangle U^{-1}p + z\Big).$$

Выясним теперь смысл второго слагаемого уравнения (3.5). Для этого рассмотрим влияние компенсированного изменения цены p, т.е. такого изменения, при котором одновременно меняется капитал K так, чтобы максимальное значение функции полезности на соответствующей бюджетной плоскости оставалось неизменным. Иными словами, теперь мы предполагаем, что капитал K зависит от p, т.е. является функцией $K(p)$, и имеет место следующее условие: $u\Big(x^*\big(p, K(p)\big)\Big) = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь функцию $x^*\big(p, K\big)$ как функцию от p, подставив вместо K соответствующую функцию $K(p)$. Полную производную функции x^* по p_i, т.е. величину $\partial x^*/\partial p_i + \partial x^*/\partial K \cdot \partial K/\partial p_i$ будем называть *компенсированной производной по* p_i и обозначать через $(\partial x^*/\partial p_i)_{comp}$. Вычислим эту производную при $i = n$.

Для этого продифференцируем уравнение (3.1) по p_n. Имеем:

$$x_n^* + \left\langle p, \left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{comp}\right\rangle - \frac{\partial K}{\partial p_n} = 0. \tag{3.9}$$

Так как при каждом p функция $u(x^*)$ остается неизменной, получаем, что вектор $(\partial x^*/\partial p_n)_{comp}$ касается поверхности $u = \mathrm{const}$, поэтому этот вектор перпендикулярен градиенту функции u, т.е. вектору $\partial u/\partial x$. С другой стороны, по определению x^*, бюджетная плоскость касается в точке x^* поверхности $u = \mathrm{const}$, поэтому нормаль p к бюджетной плоскости сонаправлена с нормалью $\partial u/\partial x$ к поверхности $u = \mathrm{const}$ (см. уравнение (3.2)). Поэтому второе слагаемое в формуле (3.9) равно нулю. Отсюда получаем, что

$$x_n^* = \frac{\partial K}{\partial p_n}. \tag{3.10}$$

Вновь продифференцируем уравнение (3.2) по p_n. Имеем

$$U\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{comp} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} p + \Lambda^*, \tag{3.11}$$

и, воспользовавшись тем, что $\langle p, (\partial x^*/\partial p_n)_{comp}\rangle = 0$, мы, выразив $(\partial x^*/\partial p_n)_{comp}$ из уравнения (3.11) и умножив полученное выражение скалярно на p, найдем выражение для $\partial\lambda^*/\partial p_n$:

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} = \mu p U^{-1}\Lambda^* = \mu\lambda^*\langle z, p\rangle.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (3.11), получим:

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{comp} = \mu\lambda^*\langle z, p\rangle U^{-1}p + U^{-1}\Lambda^* =$$
$$\mu\lambda^*\langle z, p\rangle U^{-1}p + \lambda^* z = \lambda^*\big(\mu\langle z, p\rangle U^{-1}p + z\big).$$

Сравнивая полученное выражение со вторым слагаемым правой части уравнения (3.5), заключаем, что это слагаемое равно в точности компенсированной производной функции x^* по p_n. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1 *В сделанных выше обозначениях, имеет место следующее соотношение*:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial x^*}{\partial K}\right) x_n^*. \tag{3.12}$$

Определение. Уравнение (3.12) называется *уравнением Слуцкого*.

Замечание. Выражение для $(\partial x^*/\partial p_n)_{comp}$, полученное нами при выводе уравнения Слуцкого, можно переписать так:

$$(\partial x^*/\partial p_n)_{comp} = \lambda^* \big[\mu U^{-1} p' p U^{-1} + U^{-1}\big]^{(n)},$$

где p' обозначает вектор p, рассматриваемый как столбец, в отличие от вектора p, рассматриваемого как вектор-строка. Действительно,

$$\begin{aligned}(\partial x^*/\partial p_i)_{comp} &= \lambda^* \big(\mu\langle z, p\rangle U^{-1} p' + z\big) = \lambda^* \mu U^{-1} p' \langle p, z\rangle + U^{-1}\Lambda^* = \\ &\mu U^{-1} p' p U^{-1} \Lambda^* + U^{-1}\Lambda^* = \big(\mu U^{-1} p' p U^{-1} + U^{-1}\big)\Lambda^* = \\ &\qquad \lambda^* \big[\mu U^{-1} p' p U^{-1} + U^{-1}\big]^{(n)}.\end{aligned}$$

Определение. Матрица $H = \mu U^{-1} p' p U^{-1} + U^{-1}$ называется *матрицей Слуцкого.*

Матрица Слуцкого H обладает многими замечательными свойствами. Приведем некоторые из них.

1) *Матрица H симметрична.* Действительно, так как U — симметричная матрица, то U^{-1} — также симметрична. Кроме того, матрица $p'p$ — это $n \times n$ матрица, у которой (i, j)-элемент равен $p_i p_j$, поэтому она также симметрична. Поэтому

$$\big(\mu U^{-1} p' p U^{-1}\big)^T = \mu (U^{-1})^T (p'p)^T (U^{-1})^T = \mu U^{-1} p' p U^{-1},$$

и, значит, матрица $\mu U^{-1} p' p U^{-1}$ симметрична. Осталось заметить, что сумма симметричных матриц является симметричной матрицей.

2) *Имеет место соотношение: $pH = Hp' = 0$.* Докажем, что $pH = 0$ (второе свойство вытекает из симметричности матрицы H). Действительно,

$$pH = \mu p U^{-1} p' p U^{-1} + p U^{-1} = -\frac{1}{pU^{-1}p'}(pU^{-1}p') p U^{-1} + p U^{-1} = 0,$$

что и требовалось.

3) *Матрица H является полуотрицательно определенной, т.е. для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ выполняется $vHv' \le 0$. Более того, $vHv' = 0$ тогда и только тогда, когда векторы v и p колинеарны.*

Пусть v — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Мы должны показать, что $vHv' \le 0$.

Рассмотрим скалярное произведение с матрицей $-U^{-1}$ (эта матрица симметрична и положительно определена), и пусть w — вектор из $\mathbb{R}^n$, являющийся ортогональной проекцией вектора v относительно введенного скалярного произведения на подпространство, ортогональное к p. Таким образом, $v = \alpha p + w$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и $wU^{-1}p' = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} vHv' = (\alpha p + w)H(\alpha p' + w') = \alpha^2 pHp' + \alpha pHw' + \alpha wHp' + wHw' = \\ wHw' = w(\mu U^{-1}p'pU^{-1} + U^{-1})w' = \\ \mu(wU^{-1}p')pU^{-1}w' + wU^{-1}w' = wU^{-1}w' \le 0, \end{aligned}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $w = 0$. Доказательство закончено.

Из перечисленных выше свойств вытекает полезное следствие.

Следствие 3.1 *В сделанных выше предположениях, имеем:*

$$\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\right)_{comp} < 0.$$

Иными словами, возрастание цены товара при соответствующей компенсации дохода приводит все же к снижению спроса на него.

Доказательство. Действительно, так как $(\partial x^*/\partial p_n)_{comp} = \lambda^*[H]^{(n)}$, то $(\partial x_n^*/\partial p_n)_{comp} = \lambda^* h_{nn}$, где h_{nn} — самый нижний диагональный элемент матрицы H. Пусть e_i обозначает базисный орт, тогда $h_{nn} = e_n H e_n$. Так как $p \gg 0$, то p и e_n не колинеарны, поэтому, в силу свойства (3) матрицы Слуцкого, имеем $h_{nn} < 0$, что и требовалось.

Приведем некоторые следствия из уравнения Слуцкого.

Назовем n-ый товар *ценным*, если $\partial x_n^*/\partial K > 0$, т.е. если при увеличении дохода потребителя спрос на этот товар также увеличивается. Товар, не являющийся ценным, называется *малоценным*.

Следствие 3.2 *Множество ценных товаров не пусто.*

Доказательство. Это следует из уравнения 3.6 и неотрицательности вектора p. Доказательство закончено.

Следствие 3.3 *Спрос на ценные товар при повышении цены на него обязательно падает.*

Доказательство. Это вытекает из того, что правая часть уравнения Слуцкого для x_n^* отрицательна. Следствие доказано.

Определение. Два товара i и j называются *взаимозаменяемыми*, если $(\partial x_j^*/\partial p_i)_{comp} > 0$, т.е. если при возрастании цены на i-ый товар при при компенсирующем изменении дохода (с одновременным падением спроса на товар i) спрос на товар j возрастает. Если $(\partial x_j^*/\partial p_i)_{comp} < 0$, то товары i и j называются *взаимодополнительными*.

Пример. Масло и маргарин являются взаимозаменяемыми продуктами, а бензин и автомобили — взаимодополнительными.

Следствие 3.4 *Для каждого товара i существует по крайней мере один товар j, образующий с i взаимозаменяемую пару.*

Доказательство. Пусть, без ограничения общности, $i = n$. По следствию 3.1, имеем $(\partial x_n^*/\partial p_n)_{comp} < 0$. С другой стороны, как было показано выше, $\langle (\partial x^*/\partial p_n)_{comp}, p\rangle = 0$, поэтому, так как $p \gg 0$, получаем, что существует такое j, что $(\partial x_j^*/\partial p_n)_{comp} > 0$. Доказательство закончено.

Определение. Продукт j называется *валовым заменителем продукта* i, если $\partial x_j^*/\partial p_i > 0$. Говорят, что функция $x^*(p, K)$ обладает свойством *валовой заменимости*, если с увеличением цены на любой продукт спрос на все остальные продукты не убывает, т.е. если $\partial x_j^*/\partial p_i \geq 0$ при любых $i \neq j$. Если же $\partial x_j^*/\partial p_i > 0$ при любых $i \neq j$, то говорят о *сильной валовой заменяемости*.

Задача 3.1 *Пусть $u(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^{\gamma_i}$, $\mu_i > 0$, $0 < \gamma_i < 1$, и $x^*(p, K)$ — функция спроса. Показать, что $x^*(p, K)$ обладает свойством сильной валовой заменимости.*

Лекция 4

Коллективное принятие решений

1 Введение

В данной лекции мы рассмотрим известные способы коллективного принятия решений. Основная идея состоит в том, что по каждому набору индивидуальных предпочтений (так называемому, профилю голосования) требуется построить коллективное предпочтение. Тем самым задача состоит в построении функции коллективного выбора. Обычно при решении таких задач задаются правила, применение которых и есть реализации функций коллективного выбора.

Мы покажем практическую значимость изучения данной теории на двух примерах. В первом из них мы построим профиль голосования, применение к которому разных классических функций коллективного выбора выводит на первое место разных кандидатов. Фактически, в нашем примере каждый кандидат может выйти победителем: достаточно подобрать "правильный" способ учета голосов избирателей.

Второй пример дает знаменитая теорема Эрроу о диктаторе. Идея состоит в том, что если на функцию коллективного выбора наложить некоторые естественные ограничения исключительно демократического характера, то любая функция коллективного выбора будет выражать мнение ровно одного избирателя (диктатора): как бы не голосовали все остальные избиратели, результат будет совпадать с мнением диктатора.

2 Правила голосования

Рассмотрим проект демократического выбора. Пусть $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ — некоторое множество кандидатов, $S = \{y_1, \dots, y_n\}$ — некоторое множество избирателей, и решение принимают всеобщим голосованием. Пусть у каждого избирателя y_k есть индивидуальная система предпочтения:

$$x_{i_1} \overset{k}{\succ} \cdots \overset{k}{\succ} x_{i_m}.$$

Требуется построить функцию, определяющую коллективный порядок на множестве кандидатов, т.е. правило, которое для любых заданных порядков $\overset{1}{\succ}, \dots, \overset{k}{\succ}$ определяет коллективный порядок $\succcurlyeq$:

$$\succcurlyeq = f(\overset{1}{\succ}, \dots, \overset{k}{\succ}).$$

Здесь мы предполагаем три возможности при парных сравнениях кандидатов a и b:

$$a \succ b \quad (a \text{ лучше } b),$$
$$a = b \quad (a \text{ и } b \text{ одинаковы}),$$
$$b \succ a \quad (a \text{ хуже } b),$$

и их комбинации

$$a \succcurlyeq b \quad (a \text{ не хуже } b).$$

Будем говорить, что кандидат a является *победителем*, если в коллективном предпочтении a стоит на первом месте и $a \succ \dots$, т.е. если a лучше всех остальных кандидатов.

Определение. Назовем *профилем голосования* множество всех индивидуальных предпочтений.

Пример. Пусть имеется 10 избирателей $1, \dots, 10$, и три кандидата a, b и c. Тогда профиль голосования можно представить таблицей. Например

номер избирателя	1	2	...	10
кандидаты	a	b	...	c
кандидаты	b	a	...	b
кандидаты	c	c	...	a

Иногда бывает удобно объединить одинаково проголосовавших избирателей. В этом случае предыдущая таблица становится компактней. Например

кол-во избирателей	2	3	5
кандидаты	a	b	c
кандидаты	b	a	b
кандидаты	c	c	a

Существует несколько способов определения победителя. Рассмотрим основные из них.

2.1 Метод относительного большинства

Этот способ состоит в следующем. *Каждый избиратель отдает голос ровно за одного кандидата, и кандидат, набравший наибольшее число голосов — победитель.*

Пример. Пусть имеется $n = 10$ избирателей и $m = 4$ кандидатов. Рассмотрим следующий профиль голосования:

кол-во избирателей	2	3	4	1
кандидаты	a	a	b	c
кандидаты	b	c	a	a
кандидаты	c	d	c	d
кандидаты	d	b	d	b

Итак, за кандидата a отдали 5 голосов, за кандидата b — 4 голоса, за кандидата c — 1 голос и за кандидата d — 0 голосов. Поэтому победил кандидат a.

Рассмотрим другой профиль.

кол-во избирателей	2	3	5
кандидаты	a	a	b
кандидаты	b	c	a
кандидаты	c	d	c
кандидаты	d	b	d

В этом случае за кандидатов a и b проголосовало одинаковое число избирателей, а за c и d — ни одного. В соответствии с нашим определением, победителей нет. Тем не менее, иногда бывает полезно называть победителями всех, кто набрал наибольшее число голосов. В рассматриваемом примере победителями являются два кандидата: a и b.

2.2 Метод относительного большинства

Этот способ подсчета голосов основан на следующем правиле. *Каждый избиратель выбирает ровно одного кандидата, причем кандидат, на-*

бравший больше половины голосов, является победителем. Если таких не существует или больше одного, то проводится второй тур. В первом случае если максимальное число голосов набрало более двух кандидатов, то ровно эти кандидаты участвуют во втором туре; если же максимальное число голосов набрал ровно один кандидат, то участвует он и все кандидаты, набравшие наибольшее число голосов среди оставшихся кандидатов. Во втором случае второй тур проводится для всех победителей.

2.3 Метод Борда́

Рассмотрим общий профиль голосования, в котором участвовало n избирателей и m кандидатов. Разобьем множество S всех избирателей на классы S_i, объединив в каждый из них избирателей с одинаковыми предпочтениями. Пусть имеется p таких классов, причем i-ый класс состоит из k_i избирателей: $|S_i| = k_i$. Ясно, что $k_i > 0$ и $k_1 + \cdots k_p = n$.

Чтобы определить победителя, мы припишем каждому кандидату x_i некоторое количество очков α_i по следующей схеме. Рассмотрим сначала пару (x_i, y_j) кандидат-избиратель и припишем ей некоторое число очков α_{ij} так. Если избиратель y_j поставил кандидата x_i на последнее место, то припишем этой паре 0 очков, если же на предпоследнее — то 1 очко, и т.д., и если на первое место — то $(m-1)$ очко. Иными словами, если кандидат x_i стоит на k-ом с конца месте в индивидуальной системе предпочтения избирателя y_j, то $\alpha_{ij} = k - 1$. Отметим, что избиратели каждого класса S_l ставят кандидата x_i на одно и то же место. Поэтому можно определить β_{il} как количество очков, которое получила пара (x_i, y_j) при фиксированном x_i от каждого избирателя $y_j \in S_l$.

Далее, определим теперь числа α_i, просуммировав для каждого кандидата x_i очки α_{ij} по всем парам (x_i, y_j), т.е. по всем избирателям: $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$. Ясно, что

$$\alpha_i = \sum_{l=1}^{p} k_l \beta_{il}\,.$$

Победителем считается кандидат, набравший наибольшее число очков.

2.4 Метод Кондорсе

Выберем произвольного кандидата a, и рассмотрим всевозможные пары (a, x), где x — кандидат, отличный от a. Для каждой пары (a, x) вычислим количество $k_{a,x}$ избирателей, предпочитающих a перед x, и количество $k_{x,a}$ избирателей, предпочитающих x перед a. Обозначим через r_a количество тех x, для которых $k_{a,x} \geq k_{x,a}$. *Кандидат с максимальным r_a и есть победитель.* Это метод попарного сравнения.

Пример. Рассмотрим следующий профиль голосования.

номер избирателя	1	2	3
кандидаты	a	b	d
кандидаты	b	a	a
кандидаты	c	c	b
кандидаты	d	d	c

Для наглядности, для каждого кандидата a рассмотрим лишь тех кандидатов x, для которых $k_{a,x} \geq (n - k_{a,x})$, и лишь для них будем писать $a \succcurlyeq b$ с $k_{a,x} : (n - k_{a,x})$. Имеем

$a \succcurlyeq b$ с $2 : 1$,
$a \succcurlyeq c$ с $3 : 1$,
$a \succcurlyeq d$ с $2 : 1$,
$b \succcurlyeq c$ с $3 : 1$,
$b \succcurlyeq d$ с $2 : 1$,
$c \succcurlyeq d$ с $2 : 1$.

Таким образом, $r_a = 3$, $r_b = 2$, $r_c = 1$ и $r_d = 0$, поэтому победил кандидат a.

2.5 Обобщенный метод Борда́

Этот метод получается из метода Борда введением вместо очков 1, 2, ..., $m-1$ произвольных чисел s_1, s_2, ..., s_{m-1}. Обычно на числа s_i вводятся естественные ограничения: $0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{m-1}$ и $s_{m-1} > 0$.

Замечание. Метод относительного большинства является частным случаем обобщенного метода Борда. Достаточно положить $s_1 = \cdots = s_{m-2} = 0$ и $s_{m-1} = 1$.

Метод Борда также является частным случаем обобщенного метода Борда: положим $s_i = i$.

Тем не менее, из обобщенного метода Борда не вытекают метод абсолютного большинства и метод Кондорсе. Ниже мы приведем доказательство этого факта.

Оказывается, имеет место следующее замечательное утверждение.

Предложение 4.1 *Существуют такие профили голосования, при которых разными способами получаем разных победителей.*

Доказательство. Пусть число n избирателей равно 17, а число m кандидатов равно 4. Рассмотрим следующий профиль голосования.

кол-во избирателей	5	3	5	4
кандидаты	a	a	b	c
кандидаты	d	d	c	d
кандидаты	c	b	d	b
кандидаты	b	c	a	a

Подведем итоги по разным методам.

Метод относительного большинства.

a	b	c	d
8	5	4	0

Поэтому победитель — a.

Метод абсолютного большинства. Половина голосов равна 17/2, поэтому ни один из кандидатов не набрал больше половины голосов. Далее, максимальное число голосов набрал ровно один кандидат a, набравший 8 голосов. Следующее место по числу голосов занял кандидат b, набравший 5 голосов. Следовательно, на второй тур перешло ровно два кандидата: a и b. Предполагая, что предпочтения избирателей не изменились между первым и вторым турами голосования, получим следующие результаты.

кол-во избирателей	5	3	5	4
кандидаты	a	a	b	b
кандидаты	b	b	a	a

т.е. a набрал 8 голосов, что меньше половины $(8 < 17/2)$, а b набрал 9 голосов, что больше половины $(9 > 17/2)$. Следовательно, b — победитель.

Метод Борда. Считаем очки.

a	b	c	d
$3 * 8 = 24$	$3 * 5 + 7 = 22$	$3 * 4 + 2 * 5 + 5 = 27$	$2 * 12 + 5 = 29$

поэтому, в соответствии с этим методом, победил d.

Метод Кондорсе. Составим таблицу попарных сравнений кандидатов. Имеем:

$b \succcurlyeq a$ с $9:8$,
$c \succcurlyeq a$ с $9:8$,
$c \succcurlyeq b$ с $9:8$,
$c \succcurlyeq d$ с $9:8$,
$d \succcurlyeq a$ с $9:8$,
$d \succcurlyeq b$ с $12:5$,

поэтому $r_a = 0$, $r_b = 1$, $r_c = 3$ и $r_d = 2$. Следовательно, победил c.

Предложение 4.2 *Из обобщенного метода Борда не вытекают метод абсолютного большинства и метод Кондорсе.*

Доказательство. Воспользуемся примером из доказательства предыдущего предложения, и вычислим для него результат голосования, полученный обобщенным методом Борда.

Пусть s_1, s_2 и s_3 — очки, приписываемые кандидату, занявшему с конца второе, третье и четвертое места соответственно. Тогда кандидаты наберут следующие количества очков.

a	b	c	d
$8s_3$	$5s_3 + 7s_1$	$4s_3 + 5s_2 + 5s_1$	$12s_2 + 5s_1$.

При подсчете голосов методом абсолютного большинства победителем оказался кандидат b. Можно ли сделать b победителем обобщенным методом Борда. Предположим, что можно. Тогда должно быть

$$(5s_3 + 7s_1) - 8s_3 = 7s_1 - 3s_3 \geq 0,$$
$$(5s_3 + 7s_1) - (4s_3 + 5s_2 + 5s_1) = 2s_1 - 5s_2 + s_3 \geq 0, \text{ и}$$
$$(5s_3 + 7s_1) - (12s_2 + 5s_1) = 2s_1 - 12s_2 + 5s_3 \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} 7/3s_1 \geq s_3 \\ 2s_1 \geq 5s_2 - s_3. \end{cases}$$

Складывая эти два неравенства, получаем $13/15s_1 \geq s_3$. Но $s_3 > 0$ и $s_1 \leq s_3$. Противоречие. Таким образом, ни при каких значениях s_i метод Борда не приводит в нашем примере к результатам голосования, полученным методом абсолютного большинства.

Рассмотрим теперь другой профиль голосования.

кол-во избирателей	3	6	4	4
кандидаты	c	a	b	b
кандидаты	a	b	a	c
кандидаты	b	c	c	a

Вычислим теперь победителя по методу Кондорсе. Составляем таблицу попарных сравнений.

$a \succcurlyeq b$ с $9:8$,
$a \succcurlyeq c$ с $10:7$,
$b \succcurlyeq c$ с $14:3$.

Следовательно, по Кондорсе победителем является a.

Воспользуемся теперь обобщенным методом Борда. Имеем:

a	b	c
$6s_2+7s_1$	$8s_2+6s_1$	$3s_2+4s_1$

Предположим, что кандидат a может стать победителем по обобщенному методу Борда. Тогда должно быть

$$(6s_2+7s_1)-(8s_2+6s_1)=s_1-2s_2\geq 0, \text{ и}$$
$$(6s_2+7s_1)-(3s_2+4s_1)=3s_1-3s_2\geq 0,$$

откуда $2/3s_1 \geq s_2$, но $s_2>0$ и $s_1 \leq s_2$, противоречие. Иными словами, ни при каких значениях s_i обобщенным методом Борда нельзя получить результаты голосования в нашем профиле, вычисленные с помощью метода Кондорсе. Доказательство предложения закончено.

Лекция 5

Теорема Эрроу

1 Введение

В настоящей лекции мы расскажем, как по правилам, частные случаи которых мы описали в предыдущей лекции, построить коллективное упорядочение. Идея состоит в том, чтобы после выбора победителей продолжать применять правило к оставшимся кандидатам. Таким образом, наши правила будут порождать функции коллективного выбора.

Как мы уже видели раньше, разные правила определения победителя приводят, вообще говоря, к разным результатам. Поэтому возникает желание ввести некоторые естественные ограничения на функцию коллективного выбора, чтобы избавиться от этой неопределенности. Мы приведем четыре аксиомы, имеющие с очевидностью чисто демократический характер, и построим пример функции коллективного выбора, удовлетворяющей всем этим аксиомам. Впрочем, построенная функция не слишком "демократична": эта функция ставит множеству всех индивидуальных предпочтений избирателей предпочтение ровно одного из них. Такая функция называется функцией диктатора.

В завершение лекции мы докажем теорему Эрроу, гласящую, что каждая функция коллективного выбора, удовлетворяющая четырем сформулированным аксиомам, является функцией диктатора.

2 Функция коллективного выбора. Теорема Эрроу

Пусть $S = \{y_1, \dots, y_n\}$ — множество избирателей, и $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ — множество кандидатов. Таким образом, имеется n систем индивидуального предпочтения, каждая из которых устанавливает линейный порядок на множестве всех кандидатов.

Пусть p — произвольное правило голосования. Применяя правило p, мы построим множество $M_1 = \{a_1 = \dots = a_s\}$, состоящее из победителей. Применим правило p ко множеству проигравших $M \setminus M_1$. Мы опять получим множество выигравших $M_2 = \{a_{s+1} = \dots = a_{s+l}\}$. Выкинем теперь из M объединение $M_1 \cup M_2$ и проделаем ту же операцию, и т.д. В результате мы упорядочим множество M согласно решению коллектива: $M_1 \succ M_2 \succ \cdots$. Таким образом, правило голосования позволяет построить систему коллективного предпочтения. Итак, исходя из правила p мы построили функцию коллективного предпочтения, имеющую вид $\succcurlyeq = f(\overset{1}{\succ}, \dots, \overset{n}{\succ})$, где $\overset{k}{\succ}$ — система индивидуального предпочтения избирателя y_k, а $\succcurlyeq$ — коллективное предпочтение.

Выше мы видели, что перечисленные правила подсчета голосов могут приводить к совершенно различным результатам. Чтобы добиться однозначного результата, попробуем предъявить некоторые естественные требования к функции коллективного предпочтения.

1. *Полнота.* Для любых кандидатов a и b коллективный порядок устанавливает, что либо $a \succ b$, любо $b \succ a$, либо $a = b$.

2. *Транзитивность.* Для любых трех кандидатов a, b и c, таких что $a \succcurlyeq b$ и $b \succcurlyeq c$, выполняется $a \succcurlyeq c$, причем равенство имеет место если и только если $a = b = c$.

3. *Единогласие.* Если все избиратели считают, что a лучше b, значит и в коллективном предпочтении a должен быть лучше b:
$$\forall k \ a \overset{k}{\succ} b \Rightarrow a \succ b.$$

4. *Независимость.* Положение любых двух кандидатов в коллективном предпочтении зависит только от их взаимного расположения в индивидуальных предпочтениях и не зависит от расположения других кандидатов. Иными словами, если для профиля вида

группы избирателей	кандидаты
A	$\cdots a \cdots b \cdots$
$S \setminus A$	$\cdots b \cdots a \cdots$

имеем $a \succ b$, то и для всех профилей такого вида $a \succ b$.

Замечание. Множество функций коллективного выбора, удовлетворяющих аксиомам 1–4, непусто. Примером таких функций могут служить функции диктатора, а именно, функции вида $f(\overset{1}{\succ}, \ldots, \overset{n}{\succ}) = \overset{k}{\succ}$ для некоторого k (докажите).

Теорема 5.1 (Эрроу) *Пусть f — функция коллективного предпочтения, удовлетворяющая аксиомам 1–4, и предположим, что имеется не менее трех кандидатов. Тогда f — функция диктатора.*

Замечание. Если число кандидатов меньше 3, то теорема Эрроу перестает быть верной.

Замечание. Теорему Эрроу можно интерпретировать следующим образом: диктатура описывается аксиомами, а демократия — отрицание диктатуры.

Доказательство теоремы Эрроу. Введем несколько важных понятий. Прежде всего, произвольное подмножество A множества избирателей будем называть *коалицией*. Коалицию A будем называть *f-решающей для кандидата a против кандидата b*, тогда и только тогда, когда из того, что все члены коалиции A ставят a выше b, а все члены, не входящие в A, ставят b выше a, вытекает, что в коллективном предпочтении $a \succ b$:

$$(\, \forall y_k \in A,\ a \overset{k}{\succ} b\,)\ \&\ (\,\forall y_l \notin A,\ b \overset{l}{\succ} b\,) \Rightarrow a \succ b.$$

Этот факт будем кратко записывать $A = f(a, b)$.

Отметим, что, в силу аксиомы независимости, если для одного профиля голосования имеет место расстановка голосов из определения f-решающей коалиции для a против b, и для этого профиля $a \succ b$, то условие $a \succ b$ выполняется и для любого профиля с такой расстановкой голосов. Поэтому рассматриваемая коалиция является f-решающей для a против b. Иными словами, проверку свойства, определяющего f-решающую коалицию для a против b, достаточно проводить для одного (любого) профиля.

Далее, коалиция A, такая что для любых двух кандидатов a и b коалиция A является f-решающей для a против b называется просто *f-решающей*.

Лемма 5.1 *Существует пара кандидатов (a, b), для которой найдется коалиция D, состоящая из одного избирателя d, такая что $D = f(a, b)$.*

Доказательство. Обозначим через K множество всех коалиций, для каждой из которых существует пара кандидатов (a, b), таких что эта коалиция является f-решающей для a против b. Отметим, что множество K не пусто, так как, в силу аксиомы единогласия, множество всех избирателей S образует f-решающую коалицию для любой пары кандидатов (a, b). Более того, в силу той же аксиомы единогласия, пустое множество не является f-решающей ни для какой пары кандидатов.

Рассмотрим в K коалицию D, состоящую из наименьшего числа избирателей. Мы покажем, что D состоит ровно из одного элемента, что и завершит доказательство леммы.

Предположим противное, т.е. $D = \{d\} \cup E$, где E — некоторое непустое множество кандидатов. Если S состоит более чем из двух кандидатов, рассмотрим профиль голосования

Группа избирателей	$\{d\}$	E	$S \setminus D$
кандидаты	a	c	b
кандидаты	b	a	c
кандидаты	c	b	a

Если же S состоит из двух кандидатов, рассмотрим профиль

Группа избирателей	$\{d\}$	E
кандидаты	a	c
кандидаты	b	a
кандидаты	c	b

Так как $D = f(a, b)$, то $a \succ b$. Предположим, что $c \succ b$. Тогда $E = f(c, b)$, что противоречит минимальности коалиции D. Поэтому $b \succcurlyeq c$, и, по аксиоме транзитивности, $a \succ c$. Но тогда $\{d\} = f(a, c)$, что опять же противоречит минимальности коалиции D. Таким образом, мы получили противоречие к предположению, что D состоит более чем из одного элемента, и, значит, D содержит ровно один элемент. Лемма доказана.

Лемма 5.2 *Коалиция D из предыдущей леммы является f-решающей.*

Доказательство. Пусть c — произвольный кандидат. Рассмотрим профиль

Группа избирателей	кандидаты
$\{d\}$	$\ldots a \succ \ldots \succ b \succ \ldots \succ c \ldots$
$S \setminus \{d\}$	$\ldots b \succ \ldots \succ c \succ \ldots \succ a \ldots$

Так как $\{d\} = f(a, b)$, то $a \succ b$. В силу аксиомы единогласия, $b \succ c$, поэтому, по транзитивности, $a \succ c$. Значит, $\{d\} = f(a, c)$.

Далее, пусть e — еще один кандидат. Рассмотрим профиль

Группа избирателей	кандидаты
$\{d\}$	$\ldots e \succ \ldots \succ a \succ \ldots \succ c \ldots$
$S \setminus \{d\}$	$\ldots c \succ \ldots \succ e \succ \ldots \succ a \ldots$

По аксиоме единогласия, $e \succ a$. Так как $a \succ c$, то, по транзитивности, для данного профиля имеем $e \succ c$. Но тогда $\{d\} = f(e, c)$. Таким образом, мы показали, что для любых двух кандидатов e и c коалиция $\{d\}$ является f-решающей для e против d. Значит, коалиция $\{d\}$ есть f-решающая коалиция. Лемма доказана.

Лемма 5.3 *Описанный выше избиратель d — диктатор.*

Доказательство. К этому моменту мы показали, что d может навязывать свое мнение по поводу любых двух кандидатов a и b при условии, что мнение остальных избирателей противоположно. В этом пока проявляется зависимость от мнения других. Мы должны показать, что как бы не голосовали остальные избиратели, коллективное мнение совпадает с мнением d.

Рассмотрим такие профили голосования, в которых у избирателя d порядок вида $\ldots a \overset{d}{\succ} \ldots \overset{d}{\succ} c \overset{d}{\succ} \ldots \overset{d}{\succ} b \ldots$, а все остальные избиратели ставят c выше чем a и b. Так как $\{d\}$ является f-решающей коалицией, то для таких профилей $a \succ c$; в силу аксиомы единогласия, $c \succ b$, поэтому, по транзитивности, $a \succ b$. Исключая из соотношений c и используя аксиому независимости, получаем, что если d ставит a выше b, то и в коллективном порядке $a \succ b$. В силу произвольности кандидатов a и b, получаем, что d — диктатор. Лемма доказана.

Последняя лемма завершает доказательство теоремы Эрроу.