МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Курс лекций по функциональному анализу

Лектор — Анатолий Михайлович Стёпин

III курс, 6 семестр, поток математиков

Москва, 2010 г.

Оглавление

Введение

Предисловие

Убедительная просьба ко всем читателям: в случае обнаружения ошибок немедленно сообщайте авторам на dmvn@mccme.ru или загляните на http://dmvn.mexmat.net и посмотрите, где можно достать в настоящее время самих авторов. Все пожелания и предложения по поводу оформления и содержания документа будут обязательно приняты к сведению.

Release Notes

Под «принципом равномерной ограниченности для рядов Фурье» в программе экзамена понимается существование непрерывных функций, для которых ряд Фурье расходится в точке. Это можно прочесть в книге [КФ, гл.VIII, §1, п. 1].

Если Вы хотите узнать всё про свёртки, а также уметь отвечать на вопрос про оператор свёртки в L_2, читайте по этому поводу [Б, гл. III, §9].

В последней версии добавлено доказательство теоремы Пэли – Винера.

Слова благодарности

Спасибо всем, кто замечал ошибки и присылал свои комментарии, а именно Алексею Басалаеву, Григорию Мерзону, Нине Прудовой, Михаилу Берштейну, Дмитрию Рыжову, Николаю Рудому, Владиславу Короткову, Владимиру Филатову, Ивану Вегнеру и Наталье Побыванец.

Принятые в тексте соглашения и используемые сокращения

1° Следуя [РФ], топологические понятия обозначаются сокращениями соответствующих английских слов. Так, $\operatorname{Int} A$ — множество внутренних точек множества A, $\operatorname{Cl} A$ — замыкание множества A.

2° Под термином «гладкий индикатор отрезка» мы понимаем гладкую функцию, которая равна единице на этом отрезке, и нулю вне некоторой окрестности этого отрезка.

Литература

[КФ] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* — М.: Наука, 1981.

[РС] М. Рид, Б. Саймон. *Методы современной математической физики.* — М.: Мир, 1977.

[Ш] Г. Е. Шилов. *Математический анализ. Второй специальный курс.* — М.: Физматгиз, 1965.

[КГ] А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. *Теоремы и задачи функционального анализа.* — М.: Наука, 1988.

[ХР] Г. Г. Харди, В. В. Рогозинский. *Ряды Фурье.* — М.: Физматгиз, 1959.

[Вл] В. С. Владимиров. *Обобщённые функции в математической физике.* М.: Наука, 1976.

[ГШ] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. *Обобщённые функции.* — М.: Физматгиз, 1959.

[Р] У. Рудин. *Основы функционального анализа.* — М.: Мир, 19??.

[Х] А. Я. Хелемский. *Лекции по функциональному анализу.* — М.: МЦНМО, 2004.

[РФ] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. *Начальный курс топологии.* — М.: Наука, 1977.

[Б] В. И. Богачёв. *Основы теории меры. Том 1.* — Ижевск: РХД, 2003.

Последняя компиляция: 19 мая 2010 г.
Обновления документа — на сайтах http://dmvn.mexmat.net,
http://dmvn.mexmat.ru.
Об опечатках и неточностях пишите на dmvn@mccme.ru.

1. Ряды и преобразование Фурье

1.1. Ряды Фурье

При изучении рядов Фурье мы будем предполагать, что функции у нас 2π-периодические. Поэтому их изучение сводится к рассмотрению интервала $(-\pi,\pi)$.

Определение. Пусть $f\in L_1(-\pi,\pi)$. *Рядом Фурье* функции f называется ряд

$$\sum_{\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad c_n := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \tag{1}$$

числа c_n называются *коэффициентами Фурье* функции f.

Далее мы везде считаем, что функция интегрируема по Лебегу на интервале $(-\pi,\pi)$. В противном случае нет гарантии, что коэффициенты Фурье существуют.

1.1.1. Сходимость ряда Фурье в точке

Определение. Говорят, что функция f удовлетворяет *условию Дини* в точке x, если функция

$$\varphi(h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2}$$

суммируема в некоторой δ-окрестности нуля.

Лемма 1.1 (Римана – Лебега). *Пусть функция f суммируема на отрезке $[a,b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(t)e^{ist}\,dt \to 0, \quad s\to\infty. \tag{3}$$

□ Пусть сначала $f=\mathbb{I}_{[a,b]}$. Тогда

$$\int\limits_a^b e^{ist}\,dt = \frac{1}{is}\underbrace{\left(e^{isb}-e^{isa}\right)}_{\text{ограничена}} \to 0, \quad s\to\infty. \tag{4}$$

Далее, по линейности утверждение леммы верно для конечных линейных комбинаций индикаторов. В общем случае приблизим произвольную функцию f ступенчатой функцией f_ε по норме L_1 с точностью ε. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b f(t)e^{ist}dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |f-f_\varepsilon|\cdot\left|e^{ist}\right|\,dt + \left|\int\limits_a^b f_\varepsilon(t)e^{ist}\,dt\right|. \tag{5}$$

Первое слагаемое не превосходит ε, а второе стремится к нулю по уже доказанному. ■

Замечание. Далее в разделе о рядах Фурье мы не будем писать пределы интегрирования, если мы интегрируем **по периоду** $(-\pi,\pi)$.

Теорема 1.2 (Признак Дини). *Если функция непрерывна в точке x и удовлетворяет условию Дини в точке x, то её ряд Фурье сходится в этой точке к $f(x)$.*

□ Пусть $S_n(x)$ — частичная сумма ряда Фурье. Имеем

$$S_n(x)=\sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int f(\xi)e^{-ik\xi}\,d\xi\cdot e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int f(\xi)\sum_{-n}^{n} e^{ik(x-\xi)}\,d\xi. \tag{6}$$

По формуле геометрической прогрессии имеем

$$e^{-int}+\ldots+e^{int} = \frac{e^{it(-n)}-e^{it(n+1)}}{1-e^{it}} = \frac{\exp\left[-i\left(n+\frac12\right)t\right]-\exp\left[i\left(n+\frac12\right)t\right]}{\exp\left(-\frac{it}{2}\right)-\exp\left(\frac{it}{2}\right)} = \frac{\sin\left(n+\frac12\right)t}{\sin\frac{t}{2}} =: D_n(t). \tag{7}$$

Заметим, что *ядро Дирихле* $D_n(t)$ является чётной функцией. Продолжая формулу (6) с использованием этого равенства, получаем

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int f(\xi)D_n(x-\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

В силу периодичности функции можно сделать замену $t = \xi - x$, не изменяя пределов интегрирования:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int f(x+t) D_n(t)\, dt. \tag{9}$$

Пользуясь исходным представлением для ядра Дирихле, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int D_n(t)\, dt = 1. \tag{10}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} f(x) - S_n(x) = f(x) \cdot \frac{1}{2\pi} \int D_n(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int f(x+t) D_n(t)\, dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int \frac{f(x) - f(x+t)}{t} \cdot t \cdot D_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|<\delta} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta<|t|<\pi} . \end{aligned} \tag{11}$$

Второе слагаемое стремится к нулю по лемме Римана – Лебега, так как знаменатель ядра Дирихле отделён от нуля. Что касается первого слагаемого, то оно в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и суммируемости функции $\frac{f(x)-f(x+t)}{t}$ за счёт выбора δ может быть сделано сколь угодно малым (множитель t в числителе глушит $\sin \frac{t}{2}$ в знаменателе). ■

1.1.2. Вычисление интеграла Дирихле

Докажем, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Легко видеть, что в силу леммы Римана – Лебега

$$I_n := \int\limits_0^\pi \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \right) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t\, dt \to 0, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

С другой стороны

$$I_n = 2 \int\limits_0^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{t}\, dt - \int\limits_0^\pi D_n(t) = 2 \int\limits_0^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{t}\, dt - \pi. \tag{14}$$

Делая замену $x = \left(n + \frac{1}{2}\right) t$, получаем

$$I_n = 2 \int\limits_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx - \pi. \tag{15}$$

Но так как

$$\int\limits_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \to \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad n \to \infty, \tag{16}$$

переходя к пределу в формуле (15), получаем требуемое.

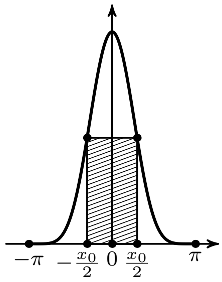
1.1.3. Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье

Утверждение 1.3. *Система функций* $\left\{ e^{inx} \right\}$ *полна в пространстве* $\mathbf{C}[-\pi, \pi]$.

□ Покажем, что если для непрерывной функции f выполнено условие $f \perp e^{inx}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, то $f \equiv 0$. Допустим противное. Без ограничения общности $f(0) =: C > 0$. Построим тригонометрический многочлен T_m, для которого $\int T_m(x)\, dx = 1$ и $|T_m(x)| < \varepsilon$ вне δ-окрестности нуля (здесь δ и ε — произвольные наперёд заданные положительные числа). Рассмотрим многочлен

$$T_m(x) := \frac{(1 + \cos x)^m}{\int (1 + \cos x)^m\, dx}. \tag{17}$$

Возьмём произвольную точку $x_0 \neq 0$ и обозначим $g(x) := 1 + \cos x$. Тогда числитель у $T_m(x_0)$ равен $g^m(x_0)$, а интеграл в знаменателе, как хорошо видно из картинки



можно оценить снизу числом

$$\left(\frac{|x_0|}{2} + \frac{|x_0|}{2}\right) \cdot g^m\left(\frac{x_0}{2}\right), \tag{18}$$

выражающим площадь заштрихованной части под графиком функции $g^m(x)$. Так как $g\left(\frac{x_0}{2}\right) > g(x_0)$, основание показательной функции в знаменателе больше, чем в числителе. Следовательно, знаменатель задавит числитель с ростом m (коэффициент при знаменателе не зависит от m и потому не повредит). Далее, ясно, что если $|x| > |x_0|$, то оценка только улучшится. Таким образом, $T_m(x) \rightrightarrows 0$ вне всякой окрестности нуля при $m \to \infty$.

В силу непрерывности, $f(x) > \frac{C}{2}$ в некоторой δ-окрестности нуля. Поэтому

$$\int f(x)T_m(x)\,dx \geqslant (1-\alpha)\cdot\frac{C}{2} - \alpha\cdot\|f\|_{\mathbf{C}}, \quad \alpha := 2\varepsilon(\pi - \delta). \tag{19}$$

Осталось взять m столь большим, чтобы последнее слагаемое стало маленьким за счёт ε, а второе — близким к $\frac{C}{2}$ за счёт того же ε. Но это означает, что скалярное произведение $(f, T_m) > 0$. Противоречие. ■

Для обоснования корректности следующей теоремы нам потребуется сделать два замечания. Во-первых, если функция абсолютно непрерывна, то у неё почти всюду существует производная и для таких функций работает интегрирование по частям.

Во-вторых, произведение абсолютно непрерывных функций снова является абсолютно непрерывной функцией (доказательство очень похоже на доказательство того, что произведение непрерывных функций непрерывно).

Теорема 1.4. *Пусть функция f абсолютно непрерывна и $f' \in L_2(-\pi, \pi)$. Тогда ряд Фурье сходится к функции f равномерно.*

□ Коэффициенты Фурье для производной будем обозначать c_n'. Оценим коэффициенты Фурье функции f, интегрируя по частям:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int f(x)e^{-inx}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\cdot f(\pi)\left(\frac{e^{in\pi}}{in} - \frac{e^{-in\pi}}{in}\right) + \frac{1}{in}\cdot\frac{1}{2\pi}\int f'(x)e^{-inx}\,dx = 0 + \frac{c_n'}{in}. \tag{20}$$

Применяя неравенство $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, получаем:

$$|c_n| = \left|c_n' \cdot \frac{1}{in}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(|c_n'|^2 + \frac{1}{n^2}\right). \tag{21}$$

Так как $f' \in L_2$, ряд $\sum |c_n'|^2$ сходится в силу неравенства Бесселя. В силу приведённой оценки, сходится и ряд $\sum |c_n|$, а поскольку ряд $\sum c_n e^{inx}$ мажорируется рядом $\sum |c_n|$, он сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Значит, он сходится к некоторой непрерывной функции φ. В силу этой равномерной сходимости, функция φ имеет те же коэффициенты Фурье, что и функция f. Значит, непрерывная функция $f - \varphi$ имеет нулевые коэффициенты Фурье и по предыдущему утверждению тождественно равна нулю. ■

1.1.4. Теорема Фейера

Утверждение 1.5. *Пусть $f \in L_1[a,b]$, а $\{\varphi_k\}$ — равномерно ограниченная константой M ортонормированная система на отрезке $[a,b]$. Тогда коэффициенты Фурье функции f по этой системе стремятся к нулю.*

□ Пусть $f_\varepsilon \in L_2[a,b]$ и $\|f - f_\varepsilon\|_{L_1} < \varepsilon$. Тогда

$$\int f\overline{\varphi}_k = \int (f - f_\varepsilon)\overline{\varphi}_k + \int f_\varepsilon\overline{\varphi}_k. \tag{22}$$

Первое слагаемое не превосходит $M\varepsilon$, а второе стремится к нулю при $k \to \infty$, потому что $f_\varepsilon \in L_2$. ■

Пусть $S_n(x)$ — частные суммы ряда Фурье для функции f. Рассмотрим *средние Фейера*:

$$P_n(x) := \frac{S_0(x) + \ldots + S_n}{n+1} = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int f(x+t) \sum_{k=0}^{n} D_k(t)\, dt. \tag{23}$$

Домножим числитель и знаменатель ядра Дирихле на $\sin\frac{t}{2}$. Тогда

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int f(x+t) \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t \cdot \sin\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\, dt. \tag{24}$$

Свернём сумму под интегралом и получим *ядро Фейера*: имеем

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t \cdot \sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\big(\cos kt - \cos(k+1)t\big), \tag{25}$$

поэтому в сумме числителей почти всё сократится, и останется $\frac{1-\cos(n+1)t}{2} = \sin^2\frac{n+1}{2}t$. Итак,

$$F_n(t) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t \cdot \sin\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}} \tag{26}$$

и

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int f(x+t) F_n(t)\, dt. \tag{27}$$

Отметим несколько необходимых нам свойств ядра Фейера.

- $F_n(t) \geqslant 0$.
- $\int F_n(t)\, dt = 2\pi$, так как ядро Фейера — это усреднённая сумма $(n+1)$-го ядра Дирихле.
- При всяком фиксированном $\delta > 0$ имеем

$$\int\limits_{|t|>\delta} F_n(t)\, dt \to 0, \quad n \to \infty. \tag{28}$$

В самом деле, при $|t| > \delta$ знаменатель ядра подпирается снизу константой $\frac{\delta}{\pi}$, поэтому

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{29}$$

Теорема 1.6 (Фейера). *Если функция f непрерывна, то средние Фейера сходятся к ней равномерно.*

□ В силу свойств ядра Фейера имеем

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int \big(f(x) - f(x+t)\big) F_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|<\delta} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|>\delta} =: \frac{1}{2\pi}(I_1 + I_2). \tag{30}$$

Поскольку функция f непрерывна, она ограничена: $|f| \leqslant M$. Кроме того, она равномерно непрерывна, то есть $|f(x) - f(x+t)| < \varepsilon$, как только $|t| < \delta$. Тогда

$$|I_1| \leqslant \varepsilon \int\limits_{|t|<\delta} F_n(t)\, dt \leqslant \varepsilon \int F_n(t)\, dt = 2\pi\varepsilon, \qquad |I_2| \leqslant 2M \int\limits_{|t|\geqslant\delta} F_n(t)\, dt. \tag{31}$$

Сначала выберем маленькое ε, для него найдётся какое-то δ, но по одному из свойств ядра Фейера, последний интеграл стремится к нулю при любом фиксированном δ. Следовательно, $P_n \rightrightarrows f$. ■

1.2. Преобразование Фурье

1.2.1. Определение преобразования Фурье. Формула обращения

В этом разделе мы не будем писать пределы интегрирования, если мы интегрируем по всей прямой $\mathbb{R}$. Под пространством L_1 понимается пространство $L_1(\mathbb{R})$.

Определение. *Преобразованием Фурье* функции $f \in L_1$ называется функция

$$\widehat{f}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{32}$$

Теорема 1.7 (Формула обращения). *Если в точке x функция f удовлетворяет условию Дини и непрерывна в этой точке, то значение функции в точке x можно восстановить по формуле*

$$f(x) = \mathrm{v.\,p.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{33}$$

□ Рассмотрим аналог частных сумм ряда Фурье:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-n}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\xi) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi \right] e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{34}$$

В силу интегрируемости f на всей прямой имеем

$$\left| \int\limits_{-n}^{n} \int f(\xi) e^{-i\lambda(\xi - x)}\, d\xi\, d\lambda \right| \leqslant 2n \cdot \|f\|_{L_1}, \tag{35}$$

а потому применима теорема Фубини, и можно поменять порядок интегрирования. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\xi) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-n}^{n} e^{-i\lambda(\xi - x)}\, d\lambda \right] d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\xi) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{in(x-\xi)} - e^{-in(x-\xi)}}{i(x-\xi)} \right] d\xi = \\ = \frac{1}{\pi} \int f(\xi) \frac{\sin n(x-\xi)}{x-\xi}\, d\xi = \frac{1}{\pi} \int f(x+t) \frac{\sin nt}{t}\, dt. \end{aligned} \tag{36}$$

Как мы уже знаем,

$$\int \frac{\sin nt}{t}\, dt = \pi. \tag{37}$$

Поэтому

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin nt\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|<A} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|>A} =: \frac{1}{\pi}(I_1 + I_2). \tag{38}$$

С первым интегралом всё ясно: для него применима лемма Римана–Лебега, поэтому он стремится к нулю с ростом n. Второй интеграл разбивается в сумму двух интегралов:

$$I_2 = \int\limits_{|t|>A} \frac{f(x+t)}{t} \sin nt\, dt + \int\limits_{|t|>A} \frac{f(x)}{t} \sin nt\, dt. \tag{39}$$

Каждый из них может быть сделан маленьким за счёт выбора достаточно большого A. ■

Контрольный вопрос: о каких интегралах в этом доказательстве идёт речь — о Римановских или о Лебеговских?

1.2.2. Свойства преобразования Фурье

Непосредственно из определения следует, что

$$|\widehat{f}(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1} \text{ при всех } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{40}$$

Отсюда следует, что если $f_n \to f$ в L_1, то $\widehat{f_n} \rightrightarrows \widehat{f}$ на $\mathbb{R}$.

Утверждение 1.8. *Преобразование Фурье функции $f \in L_1$ является непрерывной функцией.*

□ В случае, когда $f = \mathbb{I}_{[a,b]}$, доказательство тривиально:

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_a^b e^{-i\lambda x}\, dx = -\frac{e^{-ib\lambda} - e^{-ia\lambda}}{i\lambda}, \tag{41}$$

и особенность в нуле, очевидно, устраняется. По линейности наше утверждение верно и для ступенчатых функций. В общем случае приблизим нашу функцию ступенчатыми функциями f_n. Поскольку равномерный предел непрерывных функций непрерывен, получаем, что функция $\widehat{f}$ тоже непрерывна. ■

Следствие 1.1. *Преобразование Фурье $\widehat{f}(\lambda)$ убывает к нулю при $\lambda \to \infty$.*

□ Для индикаторов это следует из формулы (41). По линейности это верно и для ступенчатых функций. Общий случай — следствие равномерной сходимости. ■

Теорема 1.9. *Если $\widehat{f} \equiv 0$, то и $f = 0$ в L_1.*

□
$$0 \equiv \widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda t} \int f(x+t) e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{42}$$

Сократим на ненулевой множитель перед интегралом и проинтегрируем наш тождественный нуль от 0 до T:
$$0 \equiv \int_0^T \int f(x+t) e^{-i\lambda x}\, dx\, dt = \int \left[\int_0^T f(x+t)\, dt \right] e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{43}$$

Функция $F(x) := \int\limits_0^T f(x+t)\, dt$ абсолютно непрерывна по x, значит, почти всюду дифференцируема, а потому удовлетворяет условию Дини почти всюду. Значит, её преобразование Фурье сходится к ней почти всюду.[1] Значит, $F(x) = \int\limits_x^{x+T} f(\xi)\, d\xi \equiv 0$, так как по предыдущей формуле
$$\int F(x) e^{-i\lambda x}\, dx \equiv 0, \tag{44}$$
а это и есть преобразование Фурье для $F(x)$. Но поскольку T произвольно, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега отсюда следует, что $f = 0$ в L_1. ■

1.2.3. Связь между гладкостью и убыванием для функции и её образа Фурье

Лемма 1.10. *Пусть $f \in L_1 \cap \mathbf{AC}$ и $f' \in L_1$. Тогда*
$$\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda \widehat{f}(\lambda). \tag{45}$$

□ Имеем
$$\int f'(x) e^{-i\lambda x}\, dx = f(x) e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\lambda \int f(x) e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{46}$$

Покажем, что внеинтегральные члены равны нулю. Действительно, имеем $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\, dt$, но поскольку $f' \in L_1$, существует предел интеграла от f' при $x \to \infty$. Но этот предел может быть только нулём, так как иначе разойдётся интеграл от f. Таким образом, $\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda \widehat{f}(\lambda)$. ■

Следствие 1.2. *Если $f, f', f'' \in L_1 \cap \mathbf{AC}$, то $\widehat{f''}(\lambda) = -\lambda^2 \widehat{f}(\lambda)$ и $\widehat{f}$ суммируема.*

□ Первое утверждение очевидно. Далее, имеем $\widehat{f}(\lambda) = -\frac{\widehat{f''}(\lambda)}{\lambda^2}$, а так как $\widehat{f''}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, то $\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$. ■

Следствие 1.3. *Если $f, \ldots, f^{(k)} \in L_1 \cap \mathbf{AC}$, то*
$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (i\lambda)^k \widehat{f}(\lambda), \qquad \widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^k}\right). \tag{47}$$

□ Применяем индукцию, и всё получается. ■

Покажем, что эти свойства обратимы:

Лемма 1.11. *Если $f \in L_1$ и $xf(x) \in L_1$, то $(\widehat{f})' = -i\widehat{xf(x)}$.*

□ Будем искать производную преобразования Фурье функции f:
$$\frac{\widehat{f}(\lambda+h) - \widehat{f}(\lambda)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) \frac{e^{-i(\lambda+h)x} - e^{-i\lambda x}}{h}\, dx. \tag{48}$$

[1] Мы доказывали это для рядов Фурье. Но для преобразования Фурье это делается аналогично, нужно только заменить сумму S_n на интеграл от $e^{-i\lambda x}$.

Поскольку дробь под интегралом ограничена, применима теорема Лебега о предельном переходе. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\widehat{f}(\lambda+h)-\widehat{f}(\lambda)}{h}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)(-ix)e^{-i\lambda x}\,dx=-i\widehat{xf(x)},\tag{49}$$

что и требовалось доказать. ■

Следствие 1.4. *Если $x^m f(x)\in L_1$ при $m=0,\dots,k$, то $(\widehat{f})^{(k)}=(-i)^k\widehat{x^k f(x)}$.*

□ Снова применяем индукцию, и снова всё получается. ■

Теорема 1.12. *Если для некоторого $\delta>0$ функция $f(x)e^{\delta|x|}$ интегрируема, то функция $\widehat{f}$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im}\zeta|<\delta$.*

□ Рассмотрим преобразование Фурье с комплексным параметром $\zeta=\lambda+i\mu$:

$$\widehat{f}(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-i\zeta x}\,dx.\tag{50}$$

Видно, что при $|\mu|<\delta$ интеграл существует. Поступая так же, как и при доказательстве предыдущей леммы, имеем

$$\frac{\widehat{f}(\zeta+h)-\widehat{f}(\zeta)}{h}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)\frac{e^{-i(\zeta+h)x}-e^{-i\zeta x}}{h}\,dx\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)(-ix)e^{-i\zeta x}\,dx,\quad h\to 0.\tag{51}$$

Тем самым показано, что функция дифференцируема в указанной полосе. Но, как мы знаем из комплексного анализа, этого достаточно для аналитичности. Впрочем, и так очевидно, что полученная производная сама удовлетворяет условиям теоремы, откуда следует бесконечная дифференцируемость $\widehat{f}$. ■

Введём обозначения для операторов дифференцирования и умножения на независимую переменную. Положим $\mathcal{D}f(x):=i\frac{df}{dx}$, и $\mathcal{M}f(x):=xf(x)$. Оператор преобразования Фурье обозначим через $\mathcal{F}$. По доказанному выше, справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\mathcal{F}\mathcal{D}=-\mathcal{M}\mathcal{F},\qquad \mathcal{D}\mathcal{F}=\mathcal{F}\mathcal{M}.\tag{52}$$

1.2.4. Равенство Парсеваля для преобразования Фурье. Теорема Планшереля

В дискретном случае имеет место равенство $\|f\|^2_{L_2}=\sum|c_n|^2$. Имеется и непрерывный аналог этого равенства.

Определение. *Носителем непрерывной функции* называется множество $\operatorname{supp} f:=\operatorname{Cl}\{x\colon f(x)\neq 0\}$.

Определение. Говорят, что функция $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *финитна*, если найдётся шар $B\subset\mathbb{R}^n$ такой, что $f\equiv 0$ вне B.

Лемма 1.13 (Равенство Парсеваля). *Преобразование Фурье сохраняет скалярное произведение в L_2.*

□ Пусть для простоты функции $f,g\in\mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ и финитные. Для таких функций работает формула обращения:

$$\begin{aligned}(f,g)=\int f(x)\overline{g}(x)\,dx=\int f(x)\overline{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\widehat{g}(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda\right]}\,dx=\iint\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)\overline{\widehat{g}(\lambda)}e^{-i\lambda x}\,dx\,d\lambda=\\=\int\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right]\overline{\widehat{g}(\lambda)}\,d\lambda=\int\widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{g}(\lambda)}\,d\lambda=(\widehat{f},\widehat{g}),\end{aligned}\tag{53}$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 1.14 (Планшереля). *Пусть $f\in L_2(\mathbb{R})$. Тогда функции*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-n}^{n}f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\tag{54}$$

при $n\to\infty$ сходятся по норме $L_2(\mathbb{R})$ к некоторой функции Uf, где $U\colon L_2\to L_2$ — унитарный оператор. Если при этом $f\in L_1(\mathbb{R})$, то $Uf=\widehat{f}$.

□ Проверим равенство Парсеваля для финитных функций. Пусть сначала функция f равна нулю вне некоторого отрезка $[A,B]$. Рассмотрим последовательность $\mathbf{C}^2$-гладких финитных функций $\{\varphi_k\}$ такую, что $\varphi_k\to f$ в L_2. Для функции f определено обычное преобразование Фурье, так как она лежит в $L_1(\mathbb{R})$. Заметим, что $\varphi_k\to f$ в L_1, а потому $\widehat{\varphi}_k\rightrightarrows\widehat{f}$ на $\mathbb{R}$. Кроме того, в силу уже доказанного для хороших функций равенства Парсеваля, последовательность $\{\widehat{\varphi}_k\}$ фундаментальна в $L_2(\mathbb{R})$, а потому имеет там некоторый предел. Но в силу равномерной сходимости $\widehat{\varphi}_k$ это может быть только функция $\widehat{f}$. Таким образом, $\|\widehat{f}\|=\|f\|$.

В общем случае рассмотрим функции $f_n := f \cdot \mathbb{I}_{[-n,n]}$. Для них справедливо предыдущее рассуждение, значит, $\|\widehat{f_n}\| = \|f_n\|$. В силу фундаментальности f_n в L_2 и уже доказанного для таких функций равенства Парсеваля, последовательность $\widehat{f_n}$ фундаментальна в L_2, а потому сходится к некоторой функции Uf. В силу непрерывности L_2-нормы имеем

$$\|Uf\| = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n}\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|\,. \tag{55}$$

Таким образом, оператор U сохраняет норму (а значит, и скалярное произведение). Тем самым получено изометричное отображение $U\colon L_2 \to L_2$.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть теперь $f \in L_1 \cap L_2$. Тогда $f_n \to f$ в L_1 и $f_n \to f$ в L_2. Значит, $\widehat{f_n} \rightrightarrows \widehat{f}$, а в силу равенства Парсеваля $\{\widehat{f_n}\}$ фундаментальна в L_2 и потому сходится к некоторой функции g. Отсюда $\widehat{f} = g$ почти всюду. ■

1.2.5. Система функций Чебышёва – Эрмита

Изучим подробнее оператор U, полученный в теореме Планшереля. Ниже будет показано, что оператор $U^4 = \mathrm{id}$ в $L_2(\mathbb{R})$, поэтому в силу леммы об отображении спектра, $\Sigma(U)$ содержится среди корней четвёртой степени из единицы.

Рассмотрим систему функций

$$p_n(x) := x^n e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{56}$$

Очевидно, что $p_n \in L_2(\mathbb{R})$. Их линейная независимость очевидна. Применяя к этой системе процесс ортогонализации, получаем ортонормированную систему, которая называется системой Чебышёва – Эрмита.

Можно проверить, что функции

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad (1-2x^2)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad (-3x+2x^3)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{57}$$

являются собственными для оператора U с собственными значениями со значением 1, -1, i и $-i$ соответственно. Таким образом, спектр оператора U является точечным и состоит в точности из чисел i^k, $k = 0, 1, 2, 3$.

Теорема 1.15. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$ и не равна нулю почти всюду на $\mathbb{R}$. Кроме того, пусть $f(x)e^{\delta|x|} \in L_2(\mathbb{R})$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда система функций $\{g_n(x) := x^n f(x)\}$ полна в $L_2(\mathbb{R})$.*

□ Пусть нашлась функция h такая, что $(h, g_n) = 0$ при всех n. Покажем, что $h = 0$. Имеем

$$\int x^n f(x)\overline{h(x)}\,dx = 0. \tag{58}$$

В частности, этот интеграл существует при $n = 0$, поэтому $f(x)\overline{h(x)} \in L_1$. Значит, к этой функции можно применить преобразование Фурье:

$$g(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\overline{h(x)}e^{-i\lambda x}\,dx. \tag{59}$$

Так как $f(x)e^{\delta|x|} \in L_2(\mathbb{R})$, то функция $g(\lambda)$ будет аналитической в полосе ширины 2δ. Заметим, что все её производные в нуле с точностью до коэффициента совпадают со скалярными произведениями (h, g_n), которые равны нулю:

$$g^{(n)}(0) = (-i)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x^n f(x)\overline{h(x)}\,dx. \tag{60}$$

Значит, $g \equiv 0$, а потому $f(x)h(x) = 0$ почти всюду. Но так как $f(x) \neq 0$ почти всюду, то $h(x) = 0$ почти всюду. ■

1.2.6. Свёртка функций и её преобразование Фурье

Определение. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. *Свёрткой* функций f и g называется функция

$$(f * g)(x) := \int f(x-y)g(y)\,dy. \tag{61}$$

Из теоремы Фубини следует, что свёртка существует, так как существует кратный интеграл, который линейной заменой сводится к интегралу $\iint f(x)g(y)\,dx\,dy$, в существовании которого сомнений не возникает.

Утверждение 1.16. *Имеет место равенство $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.*

☐ Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left[\int f(x-y)g(y)\,dy\right]e^{-i\lambda x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left[\int f(x-y)e^{-i\lambda(x-y)}e^{-i\lambda y}\,dx\right]g(y)\,dy=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left[\int f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi\right]e^{-i\lambda y}g(y)\,dy=\widehat{f}(\lambda)\cdot\int e^{-i\lambda y}g(y)\,dy=\sqrt{2\pi}\cdot\widehat{f}(\lambda)\cdot\widehat{g}(\lambda),\qquad(62)$$

что и требовалось доказать.[2] ■

1.2.7. Решение уравнения теплопроводности

Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t=u_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\quad t\geqslant 0,\qquad(63)$$

причём известно начальное распределение тепла $u(x,0)=\varphi(x)$.

Наложим на функцию $u(x,t)$ дополнительные условия:

1. Пусть u, u_x, u_{xx} интегрируемы по всей оси x для любого фиксированного $t\geqslant 0$.
2. Существует интегрируемая функция f, для которой $|u_t(x,t)|\leqslant f(x)$.

Возьмём преобразование Фурье от производной u_t по переменной x:

$$\widehat{u_t}(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}}u_te^{-i\lambda x}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}}u(x,t)e^{-i\lambda x}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}v(\lambda,t),\qquad\text{где}\qquad v(\lambda,t):=\int\limits_{\mathbb{R}}u(x,t)e^{-i\lambda x}\,dx.\qquad(64)$$

Аналогично,

$$\widehat{u_{xx}}(\lambda)=-\lambda^2\widehat{u}(\lambda)=-\lambda^2v(\lambda,t).\qquad(65)$$

Таким образом, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (λ считаем параметром):

$$\frac{d}{dt}v=-\lambda^2v.\qquad(66)$$

Решая его, получаем $v(\lambda,t)=C(\lambda)e^{-\lambda^2t}$. Вычислим константу, исходя из начальных условий.

$$C(\lambda)=v(\lambda,0)=\int\limits_{\mathbb{R}}u(x,0)e^{-i\lambda x}\,dx=\widehat{\varphi}(\lambda),\qquad(67)$$

то

$$v(\lambda,t)=\widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda^2t}.\qquad(68)$$

Применяя формулу обращения к функции v, получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\varphi(x-\xi)d\xi.\qquad(69)$$

Здесь мы пользуемся тем, что обратное преобразование Фурье переводит произведение преобразований Фурье в свёртку исходных функций, и тем, что обратное преобразование Фурье функции $e^{-\lambda^2t}$ легко считается. Полученное выражение называется интегралом Пуассона.

1.2.8. Оператор Фурье в пространстве Шварца

Определение. *Пространство Шварца $\mathcal{S}$* состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций, для которых выполнено

$$\|f\|_{p,q}:=\max_{\mathbb{R}}\left|x^pf^{(q)}\right|<\infty\qquad\text{при всех }p,q\in\mathbb{Z}_+.\qquad(70)$$

Введённая система полунорм $\|\cdot\|_{p,q}$ превращает $\mathcal{S}$ в метрическое пространство.

Лемма 1.17. *Пространство $\mathcal{S}$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$ по норме L_2.*

☐ Легко видеть, что функции Чебышёва – Эрмита, введённые нами ранее, являются функциями класса $\mathcal{S}$. Осталось вспомнить, что они образуют полную ортонормированную систему. ■

[2] Кстати, можно было бы избавиться от множителя $\sqrt{2\pi}$ в этой формуле, если коэффициент $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ добавить в определение свёртки.

Утверждение 1.18. *Оператор $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ корректно определён.*

□ Пусть $f \in \mathcal{S}$. Покажем, что $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. Выкладки проведём с точностью до множителей:

$$\lambda^p (\widehat{f})^{(q)}(\lambda) = \mathcal{M}^p \mathcal{D}^q \mathcal{F} f = \mathcal{M}^p \mathcal{F} \mathcal{M}^q f = \mathcal{F} \mathcal{D}^p \mathcal{M}^q f = \mathcal{F}\left[\left(x^q f(x)\right)^{(p)}\right]. \tag{71}$$

Расписывая p-ю производную по правилу Лейбница, получим линейную комбинацию произведений производных функции f и степеней x. Поскольку $f \in \mathcal{S}$, функции вида $x^m f^{(k)}$ заведомо лежат в $L_1(\mathbb{R})$. А мы знаем, что преобразование Фурье функции из $L_1(\mathbb{R})$ — это ограниченная функция. Значит, каждое слагаемое в нашей сумме равномерно ограничено, а потому и вся сумма равномерна ограничена. Итак, мы показали, что $\|\widehat{f}\|_{p,q} < \infty$ при всех p, q, но это и означает, что $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. ■

Заметим, что для функций класса $\mathcal{S}$ работает формула обращения. Пусть $g \in \mathcal{S}$. Через $\mathcal{O}$ обозначим оператор отражения: $\mathcal{O}f(x) := f(-x)$. Рассмотрим

$$f(\lambda) := \widehat{g}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(x) e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{72}$$

Запишем для g формулу обращения:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(-\lambda) e^{-i\lambda x}\, d\lambda. \tag{73}$$

Таким образом, получаем, что

$$g = \mathcal{F}\mathcal{O}\mathcal{F} g. \tag{74}$$

Поскольку $\mathcal{O}$ и $\mathcal{F}$ коммутируют, получаем, что $\mathcal{F}^2 = \mathcal{O}$ и $\mathcal{F}^4 = \mathrm{id}$.

Теперь заметим, что эти свойства можно распространить на всё пространство $L_2(\mathbb{R})$, поскольку $\mathcal{S}$ в нём плотно.

1.2.9. Теорема Пэли – Винера

Данный раздел добавлен в лекции в мае 2010 года по просьбе лектора. Доказательство теоремы прислано Натальей Побыванец (`n.pobyvanets@gmail.com`). Нами были исправлены *замеченные* опечатки, но это не гарантирует, что оставшийся текст не содержит ошибок и неточностей.

Теорема 1.19 (Пэли – Винера). *Функция $f \in L_2(-a,a)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{f}$ — целая функция и $|\widehat{f}(\lambda)| \leqslant C_f \cdot e^{a|\mathrm{Im}\lambda|}$.*

□ **Необходимость.** Пусть $f \in \mathrm{L}_2(-a,a)$. Тогда $\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} f(x) e^{-ix\lambda}\, dx$. Верна оценка

$$|\widehat{f}(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} |f(x)| e^{x|\mathrm{Im}\lambda|}\, dx \leqslant C_f e^{a|\mathrm{Im}\lambda|}.$$

Функция $\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} f(x) e^{-ix\lambda}\, dx$ непрерывна в каждой точке комплексной плоскости и имеет непрерывную производную. Следовательно, это целая функция.

Достаточность. Пусть $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ и $|g(\lambda)| \leqslant Ce^{a|\mathrm{Im}\lambda|}$. Докажем, что $g = \widehat{f}$, где $f \in \mathbb{R}$ и обращается в ноль почти всюду вне $[-a,a]$. Наложим дополнительное условие на g: $g(\lambda) \leqslant \frac{Ce^{a|\mathrm{Im}\lambda|}}{|1+\lambda^2|}$. Воспользуемся формулой обращения. Тогда $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} g(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda$. По лемме Коши контур интегрирования можно сдвинуть в комплексную плоскость:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} g(\lambda + ib) e^{i(\lambda+ib)x}\, d\lambda.$$

Тогда для $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{Ce^{ab}}{|1+\lambda^2|} |e^{(i\lambda - b)x}|\, d\lambda \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{Ce^{ab}}{|1+(\lambda+ib)^2|} e^{-bx}\, d\lambda \to 0, \quad b \to \infty.$$

Так как значение интеграла на самом деле не зависит от b, получаем, что $f(x) = 0$ при $x > a$. Аналогично, устремляя b к $-\infty$, получаем, что $f(x) = 0$ при $x < -a$.

Остается избавиться от условия убывания $g(\lambda)$ на бесконечности. Пусть $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, тогда $\exists\, f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, такая что $\widehat{f} = g$. Возьмём $\varphi_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\varphi_\varepsilon \in C^\infty$, $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ и $\int \varphi_\varepsilon = 1$. Из уже доказанной части теоремы следует, что $|\widehat{\varphi_\varepsilon}(\lambda)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon|\mathrm{Im}\lambda|}$. Вместо функции g рассмотрим функцию $g\cdot\widehat{\varphi_\varepsilon}$. Тогда $f*\varphi_\varepsilon$ — обратное преобразование Фурье функции $g\cdot\widehat{\varphi_\varepsilon}$. Заметим, что g — целая и $|g\cdot\widehat{\varphi_\varepsilon}(\lambda)| \leqslant \frac{De^{(a+\varepsilon)|\mathrm{Im}\lambda|}}{|1+\lambda^2|}$, φ_ε — гладкие, $|\widehat{\varphi_\varepsilon}|$ — убывает (в силу гладкости). Из уже доказанной части теоремы следует, что $f=0$ почти всюду вне $[-a,a]$. Таким образом, $f*\varphi_\varepsilon=0$ вне $[-a-\varepsilon,a+\varepsilon]$. Докажем, что $f=0$ почти всюду вне $[-a,a]$ для $\forall\, g$. Нам потребуется следующие определения:

Определение. Пусть M — измеримое по Лебегу множество. Точка c называется точкой плотности для M, если $\frac{\lambda(M\cap[c-\varepsilon,c+\varepsilon])}{2\varepsilon}\to 1$ при $\varepsilon\to 0$, где λ — мера Лебега.

Определение. Точка c — точка Лебега для функции f, если $\exists\, a\in\mathbb{R}$, что

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}|f(x)-a|\,dx\to 0.$$

Пример 2.1. Любая точка непрерывности — точка Лебега.

Задача 1.1. *Обратное неверно, приведите контрпример.*

Замечание. Заметим, что точка Лебега для индикатора множества является точкой плотности для этого множества.

Доказательство того, что $f=0$ почти всюду вне $[-a,a]$ для $\forall g$ поведем от противного. Пусть $f\neq 0$ почти всюду левее $-a$. Тогда $\exists\, c<-a$, такое что c — точка Лебега для f. Тогда верно, что

$$\frac{1}{2\delta}\int\limits_{[c-\delta,c+\delta]}|f(x)-b|\,dx<\frac{1}{100}.$$

По определению свертки $f*\varphi_\varepsilon=\int\limits_{|s|<\varepsilon}f(x-s)\varphi_\varepsilon(s)\,ds$. Тогда в любой s-окрестности (при $s<\varepsilon$) любой точки $\overline{x}$ можно построить функцию $f(x-s)\varphi_\varepsilon(s)$ и приблизить ее функцией $b\cdot\varphi_\varepsilon(s)$. Тогда (по определению φ_ε) получаем $f*\varphi_\varepsilon\neq 0$ почти всюду вне $[-a-\varepsilon,a+\varepsilon]$. Получаем противоречие. Аналогично доказывается в случае предположения, что $f\neq 0$ почти всюду правее a. Следовательно, $f=0$ почти всюду вне $[-a-\varepsilon,a+\varepsilon]$. ■

2. Обобщённые функции

2.1. Обобщённые функции на пространстве $\mathcal{D}$

2.1.1. Пространство $\mathcal{D}$ основных функций

Определение. Пространство $\mathcal{D}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Оно ещё иногда обозначается $\mathbf{C}_0^\infty$.

Определение. Пусть $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{D}$. Говорят, что $\varphi_n\to\varphi\in\mathcal{D}$, если найдётся отрезок $[A,B]$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi_n\subset$ $\subset[A,B]$ при всех n и $\varphi_n^{(m)}\rightrightarrows\varphi^{(m)}$ при всех m.

Определение. *Обобщённой функцией* на пространстве $\mathcal{D}$ называется линейный непрерывный функционал $F\colon\mathcal{D}\to\mathbb{C}$. Непрерывность означает, что если $\varphi_n\to\varphi$ в $\mathcal{D}$, то и $F(\varphi_n)\to F(\varphi)$. Функции $\varphi\in\mathcal{D}$ называются *основными* (а иногда ещё *тестовыми* или *пробными*). Пространство обобщённых функций на $\mathcal{D}$ обозначается через $\mathcal{D}'$.

Как мы потом узнаем, сходимость в $\mathcal{D}$ можно задать топологией. Вообще, топологизуемость сходимости — очень нетривиальный факт. Следующее утверждение показывает, что это не всегда можно сделать.

Утверждение 2.1. *Сходимость почти всюду нельзя задать топологией.*

□ Рассмотрим пример Рисса последовательности функций, сходящихся по мере к нулю, но не сходящихся почти всюду. Допустим, что есть топология, задающая нашу сходимость. Так как нет сходимости почти всюду, то, в частности, нет сходимости почти всюду к нулю (то есть сходимости к нулю в нашей топологии). Значит, найдётся окрестность нуля U, вне которой находится бесконечно много элементов последовательности. Эти элементы образуют подпоследовательность исходной последовательности, поэтому тоже сходятся по мере к нулю. По теореме Рисса из них можно выбрать из них подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. С одной стороны, она обязана сходиться почти всюду именно к нулю. С другой стороны, вся она лежит вне некоторой окрестности U нуля. Противоречие. ■

2.1.2. Примеры обобщённых функций

Пример 1.1. Пусть f — локально-суммируемая на прямой функция. Тогда функционалы вида

$$F_f(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

являются обобщёнными функциями. Проверим непрерывность: пусть $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}$ и $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [A, B]$, тогда

$$F(\varphi_n) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx \leqslant \max_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \cdot \int\limits_A^B |f|\;dx \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Определение. Обобщённые функции, значения которых на основных функциях задаются как интеграл от произведения основной функции и локально-суммируемой функции, называются *регулярными.* Все остальные обобщённые функции называются *сингулярными.*

Часто значение обобщённой функции F на основной функции φ записывают так: $\langle F, \varphi\rangle$.

Пока мы не знаем, существуют ли сингулярные функции. Сейчас узнаем...

Пример 1.2. *Дельта-функцией Дирака* называется функция, действующая по правилу

$$\langle \delta, \varphi\rangle := \varphi(0). \tag{3}$$

Линейность и непрерывность такого функционала очевидна.

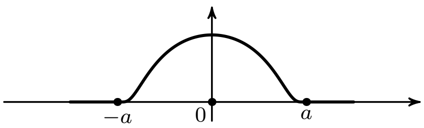
Утверждение 2.2. *δ-функция сингулярна.*

□ Допустим, что существует такая локально-суммируемая функция f, что

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0) = \int f(x)\varphi(x)\,dx \text{ для всех } \varphi \in \mathcal{D}. \tag{4}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_a(x) := \begin{cases} \exp \frac{a^2}{x^2 - a^2}, & |x| < a; \\ 0, & |x| \geqslant a. \end{cases} \tag{5}$$



Имеем $\varphi_a(0) = \frac{1}{e}$ при всех a. Легко видеть, что $\varphi_a \to 0$ почти всюду при $a \to 0$, поэтому интеграл тоже обязан стремиться к нулю. С другой стороны, он должен быть равен ненулевой константе. Противоречие. ■

Пример 1.3. Производная δ-функции действует так:

$$\langle \delta', \varphi\rangle := -\varphi'(0). \tag{6}$$

Линейность и непрерывность такого функционала тоже очевидна.

Замечание. Пока «производная» — это только название. Чуть позже мы увидим, что обобщённые функции можно дифференцировать сколько угодно раз, и окажется, что производная от δ-функции действует именно таким образом.

Всякой локально суммируемой функции мы поставили в соответствие некоторую обобщённую функцию. Покажем, что это соответствие инъективно.

Утверждение 2.3. *Если для локально-суммируемой функции f имеет место равенство*

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \text{ при всех } \varphi \in \mathcal{D}, \tag{7}$$

то $f = 0$ почти всюду.

□ В нашем распоряжении есть основные функции, являющиеся «почти индикаторами» отрезков, то есть функции φ_ε, равные 1 на заданном отрезке $[a, b]$ и нулю вне ε-окрестности этого отрезка. Пусть φ_ε — последовательность «почти индикаторов» отрезка $[a, b]$. Имеем

$$\int f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx = 0, \tag{8}$$

поэтому по теореме Лебега о предельном переходе при $\varepsilon \to 0$ получаем, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0. \tag{9}$$

Итак, интеграл по всякому отрезку от функции f равен нулю. Значит, $f = 0$ почти всюду. ■

Пример 1.4. Действие обобщённой функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ задаётся так:

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \mathrm{v.\,p.} \int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \tag{10}$$

Покажем, что функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ сингулярна. В самом деле, если бы существовала регулярная функция F_f, задающая то же действие, что и $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, то, в частности, оно совпадало бы на основных функциях, для которых $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Но для таких функций регуляризация уже есть — это функция $\frac{1}{x}$ (так как носитель φ не содержит нуля, он отделён от него некоторой окрестностью, поэтому значение v. p.-интеграла совпадает с обычным интегралом). Значит, если регуляризация есть, то она должна почти всюду совпадать с $\frac{1}{x}$. Но эта функция, очевидно, не является локально-суммируемой.

2.1.3. Действия над обобщёнными функциями. Дифференцирование

Начнём с наводящих соображений. Пусть F_f — регулярная обобщённая функция, причём f дифференцируема. Тогда

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{11}$$

Спросим себя, чему должно быть равно $F_{f'}$? Интегрируя по частям и вспоминая, что основные функции финитны, получаем

$$\langle F_{f'}, \varphi \rangle = \int f'\varphi\,dx = -\int f\varphi'\,dx = -\left\langle F_f, \varphi' \right\rangle. \tag{12}$$

Итак, в этом случае обобщённые функции можно дифференцировать, перекидывая производные на основную функцию. Это соображение и положено в основу следующего определения.

Определение. Пусть задана обобщённая функция F. Её *производной* называется функционал

$$\langle F', \varphi \rangle := -\left\langle F, \varphi' \right\rangle. \tag{13}$$

Линейность такого функционала очевидна, осталось доказать непрерывность. В самом деле, если $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}$, то и $\varphi_n' \to 0$ в $\mathcal{D}$. Следовательно,

$$\langle F', \varphi_n \rangle = -\langle F, \varphi_n' \rangle \to 0, \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Напомним, что $*$-слабой сходимостью обобщённых функций называется следующее: говорят, что $F_n \to F$, если для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем $F_n(\varphi) \to F(\varphi)$.

Утверждение 2.4. *Оператор дифференцирования на обобщённых функциях непрерывен в смысле $*$-слабой сходимости.*

□ Пусть $F_n \xrightarrow{*\mathrm{w}} F$. Покажем, что $F_n' \xrightarrow{*\mathrm{w}} F'$. Действительно,

$$\langle F_n', \varphi \rangle = -\langle F_n, \varphi' \rangle \to -\langle F, \varphi' \rangle = \langle F', \varphi \rangle, \tag{15}$$

что и требовалось доказать. ■

Из определения дифференцирования следует, что обобщённые функции можно дифференцировать сколько угодно раз, так как $\varphi \in \mathbf{C}^\infty$.

Скажем пару слов о *замене переменной* в обобщённых функциях. Определим, например, что такое $\delta(x-a)$. Ответ ясен: это функционал, который основной функции φ ставит в соответствие её значение в точке a.

Пусть $x(\xi)$ — гладкая монотонная замена переменной. Рассмотрим регулярную функцию F_f. Тогда

$$\langle F_f(x), \varphi(x) \rangle = \int f\big(x(\xi)\big)\varphi\big(x(\xi)\big)\frac{dx}{d\xi}\,d\xi. \tag{16}$$

Тогда, в силу того что определена обратная функция $\xi(x)$, положим

$$\left\langle F\big(x(\xi)\big), \varphi(\xi) \right\rangle := \left\langle F(x), \varphi\big(\xi(x)\big)\frac{d\xi}{dx} \right\rangle. \tag{17}$$

А ещё обобщённые функции можно *умножать на гладкие функции*. Пусть $\psi \in \mathbf{C}^\infty$, а $F \in \mathcal{D}'$. Тогда

$$\langle \psi F, \varphi \rangle := \langle F, \psi\varphi \rangle. \tag{18}$$

2.1.4. Формула суммирования Пуассона

Определение. *Функцией Хевисайда* называется функция

$$\theta(x) := \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{19}$$

Лемма 2.5. *$\theta'(x) = \delta(x)$.*

□ В самом деле, $\langle \theta', \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$. ■

Лемма 2.6. *Частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ограничены в совокупности.*

□ В силу периодичности и нечётности синуса достаточно доказать утверждение для $x \in [0, \pi]$. При $x = 0$ доказывать нечего. Разобьём сумму на два слагаемых: пусть $m := \min\left\{N, \left[\frac{\pi}{x}\right]\right\}$, тогда

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{m} + \sum_{n=m+1}^{N} =: S_1 + S_2. \tag{20}$$

Так как $|\sin x| \leqslant |x|$, то

$$|S_1| \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{nx}{n} \leqslant \left[\frac{\pi}{x}\right] \cdot x \leqslant \pi. \tag{21}$$

Для оценки второй суммы применим преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}), \qquad \text{где} \qquad B_k := \sum_{i=1}^{k} b_i. \tag{22}$$

Положим $a_k := \frac{1}{k}$, а $b_k := \sin kx$. Тогда

$$S_2 = \sum_{n=m+1}^{N} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{N} \sum_{k=m+1}^{N} \sin kx + \sum_{n=m+1}^{N-1} \left[\sum_{k=m+1}^{n} \sin kx\right] \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \tag{23}$$

Первое слагаемое можно грубо оценить по модулю числом 1, поскольку в сумме меньше, чем N, слагаемых, не превосходящих по модулю 1. Далее, домножим и поделим второе слагаемое на $\sin \frac{x}{2}$. После сворачивания суммы синусов числитель оценивается по модулю константой 1. Тогда

$$\begin{aligned} |S_2| \leqslant 1 + \sum_{n=m+1}^{N-1} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{n=m+1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ = 1 + \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{N}\right) \leqslant 1 + \frac{1}{\sin \frac{x}{2}(m+1)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Так как $\sin \frac{x}{2} \geqslant \frac{x}{\pi}$, а $m \approx \frac{\pi}{x}$, знаменатели равномерно ограничены некоторой константой, что и требовалось. ■

Теорема 2.7 (Формула Пуассона).

$$\sum_{\mathbb{Z}} e^{ikx} = 2\pi \sum_{\mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi k). \tag{25}$$

□ Сразу скажем, как всё это следует понимать. Подразумевается, что выражения равны как обобщённые функции, то есть они совпадают при действии на тестовых функциях. Тогда слева получится сумма коэффициентов Фурье функции φ, а справа — сумма её значений в точках $2\pi k$ (ввиду финитности функции φ сумма конечна).

Покажем, что ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится к функции $\frac{\pi - x}{2}$, продолженной с отрезка $[0, 2\pi]$ периодически на всю ось. Рассмотрим функцию

$$\ln(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \ldots \tag{26}$$

и подставим $z = e^{i\varphi}$. Тогда

$$\operatorname{Im}\ln(1-z) = \arg\left(1 - e^{i\varphi}\right) = -\frac{\pi - \varphi}{2} = -\frac{\sin\varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{\sin 3\varphi}{3} - \dots \tag{27}$$

Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\pi-\varphi}{2}$.

Теперь рассмотрим наш ряд как сумму регулярных обобщённых функций и продифференцируем его:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{\mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n), \tag{28}$$

так как в точках $2\pi n$ скачок функции равен π. Далее, сумму косинусов представим в виде экспонент:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbb{Z}} e^{inx}. \tag{29}$$

Домножая полученное равенство на 2, получаем искомую формулу. Законность всех этих преобразований обеспечивается предыдущими леммами. ■

2.1.5. Дифференциальные уравнения в классе обобщённых функций

Лемма 2.8. *Функция $\varphi \in \mathcal{D}$ является производной функции из $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда $\int \varphi = 0$.*

□ Справа налево это очевидно: $\int \psi' = \psi\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Наоборот: положим $\psi(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$. Полученная функция будет финитной, так как при $x > \max\{t \colon t \in \operatorname{supp}\varphi\}$ интеграл обнулится. ■

Следствие 2.1. *Любая функция $\varphi \in D$ представима в виде $\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1$, где φ_1 — некоторая фиксированная функция, для которой $\int \varphi_1 = 1$, а $\int \varphi_0 = 0$.*

□ Действительно, пусть φ_1 — такая функция, что $\int \varphi_1 = 1$. Положим $\lambda := \int \varphi$ и $\varphi_0 := \varphi - \lambda\varphi_1$. ■

Теорема 2.9. *Дифференциальное уравнение $F' = 0$, где $F \in \mathcal{D}'$, имеет лишь постоянные решения F_C.*

□ Имеем $\langle F', \varphi\rangle = -\langle F, \varphi'\rangle = 0$. По предыдущей лемме функции производные функций из $\mathcal{D}$ есть в точности такие функции φ, что $\int \varphi = 0$. Представим любую функцию из $\mathcal{D}$ в виде $\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1$ и положим $C := \langle F, \varphi_1\rangle$. Тогда, если F — решение, то

$$\langle F, \varphi\rangle = \langle F, \varphi_0 + \lambda\varphi_1\rangle = \underbrace{\langle F, \varphi_0\rangle}_{0} + \lambda \langle F, \varphi_1\rangle = C\lambda = C \int \varphi = \langle F_C, \varphi\rangle. \tag{30}$$

Таким образом, уравнение имеет только «классическое» решение $F = \text{const}$. ■

Замечание. Решений в классе обобщённых функций может быть как больше, так и меньше. Например, уравнение $xy' = 0$ имеет два решения: $y(x) \equiv 0$ и $y(x) = \theta(x)$. А вот уравнение $-\frac{1}{2}x^3 y' = y$ имеет классическое решение $y = e^{\frac{1}{x^2}}$, не допускающее регуляризации (это мы докажем позже), поэтому в классе $\mathcal{D}'$ имеется лишь тривиальное решение $y \equiv 0$.

Лемма 2.10. *Обобщённые решения линейных однородных систем с гладкими коэффициентами суть классические.*

□ Рассмотрим систему

$$y' = A(x)y. \tag{31}$$

Пусть $\Phi(x)$ — фундаментальная матрица этой системы. Тогда $\Phi' = A\Phi$. Сделаем замену $y = \Phi z$ и подставим в исходную систему. Получим $\Phi' z + \Phi z' = Ay = A\Phi z$, но $\Phi' z = A\Phi z$, поэтому получим уравнение $\Phi z' = 0$. А про его решения мы всё знаем: они только классические. Значит, исходная система имеет только классические решения. ■

Теорема 2.11. *Для любой обобщённой функции G уравнение $F' = G$ имеет решение.*

□ Если F — решение, то

$$\langle F, \varphi'\rangle = -\langle F', \varphi\rangle = -\langle G, \varphi\rangle. \tag{32}$$

Таким образом, мы уже знаем, как F должно действовать на производные финитных функций. Представим функцию φ в виде

$$\varphi = \widetilde{\varphi} + \varphi_0 \int \varphi, \text{ где } \int \varphi_0 = 1. \tag{33}$$

Доопределим F: положим $\langle F, \varphi_0 \rangle := 0$.

Покажем, что так определённый линейный функционал F непрерывен. Пусть $\varphi_n \to 0$. Из разложения

$$\varphi_n = \widetilde{\varphi}_n + \varphi_0 \int \varphi_n \tag{34}$$

видно, что $\widetilde{\varphi}_n \to 0$. Тогда

$$\langle F, \varphi_n \rangle = \langle F, \widetilde{\varphi}_n \rangle + \int \varphi_n \cdot \underbrace{\langle F, \varphi_0 \rangle}_{0} \to 0, \tag{35}$$

потому что мы знаем, что действие F на $\widetilde{\varphi}_n$ — это (с точностью до знака) действие G на первообразную $\psi_n(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \widetilde{\varphi}_n(t)\,dt$. Но ясно, что $\psi_n \to 0$, поэтому и $\langle G, \psi_n \rangle \to 0$. ■

Допустим, что мы умеем решать однородные системы вида $y' = Ay$. Научимся решать системы вида

$$y' - Ay = \vec{F}. \tag{36}$$

Пусть Φ — фундаментальная матрица однородной системы. Тогда $\Phi' = A\Phi$. Снова делаем замену $y = \Phi z$ и подставим в систему:

$$\Phi' z + \Phi z' - A\Phi z = \vec{F}. \tag{37}$$

Но $\Phi' z = A\Phi z$, поэтому уравнение примет вид

$$\Phi z' = \vec{F}. \tag{38}$$

Отсюда получаем систему $z' = \Phi^{-1}\vec{F}$, которую мы уже умеем решать.

2.2. Структура обобщённых функций

2.2.1. Регуляризация обобщённых функций

Пусть у функции f в нуле имеется неинтегрируемая особенность, а во всех остальных точках всё хорошо. Тогда, конечно, $\int f\varphi$ может и не существовать. Однако, если $0 \notin \operatorname{supp}\varphi$, интеграл $\int f\varphi$ существует. Поэтому если f растёт не более чем полиномиально (как x^{-d}) при $x \to 0$, то функцию f как обобщённую можно *регуляризовать*. Пусть $\mathbb{I}$ — гладкий индикатор отрезка $[-1, 1]$. Представим всякую финитную функцию в виде суммы функции, имеющей ноль не менее, чем d-го порядка в нуле (подпространство таких функций обозначим через D_d), и некоторой линейной комбинации фиксированных функций из $\mathcal{D}$. Легко видеть, что разложение

$$\varphi(x) = \Big[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{d-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \cdot \mathbb{I}(x)\Big] + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \cdot \mathbb{I}(x) \tag{39}$$

является искомым. На функциях $\varphi_d \in D_d$ определим функционал так:

$$\langle F_f, \varphi_d \rangle := \int f(x)\varphi_d(x)\,dx. \tag{40}$$

А на функциях $\psi_k := x^k \cdot \mathbb{I}(x)$ доопределим его так:

$$\langle F_f, \psi_k \rangle := (-1)^k \big\langle \delta^{(k)}, \psi_k \big\rangle = \big\langle \delta, \psi_k^{(k)} \big\rangle = k! \tag{41}$$

Таким образом, на произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}$ функционал F_f будет действовать так:

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int f(x)\Big[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{d-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \cdot \mathbb{I}(x)\Big]\,dx + \sum_{k=0}^{d-1} \varphi^{(k)}(0). \tag{42}$$

Определение. *Горбом* в точке a называется гладкая неотрицательная функция φ с носителем $[-1, 1]$, такая, что $\varphi(x) = 1$ при $x \in \big[a - \frac{1}{4}, a + \frac{1}{4}\big]$ и $\int \varphi = 1$.

Теорема 2.12. *Если f растёт быстрее любой обратной степени x при $x \to 0$, то задача регуляризации неразрешима, то есть не существует такой обобщённой функции F, что на функциях $\varphi \in \mathcal{D}$, носитель которых не содержит нуля, она действует как*

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle F_f, \varphi \rangle = \int f\varphi\,dx. \tag{43}$$

□ Рассмотрим горб $\psi(x)$ в точке 0. Теперь сожмём его в n раз и сдвинем в точку $\frac{2}{n}$, то есть рассмотрим функцию

$$\psi_n(x) := \psi\left(n\left(x - \frac{2}{n}\right)\right). \tag{44}$$

А теперь рассмотрим функции

$$\varphi_n(x) := \varepsilon_n \cdot \psi_n(x), \tag{45}$$

где $\varepsilon_n := \frac{2n}{f\left(\frac{3}{n}\right)} \to 0$, потому что f стремится к нулю быстрее любой степени x. Заметим, что $\operatorname{supp}\psi_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right]$. Тогда

$$0 \leftarrow \langle F, \varphi_n\rangle = \varepsilon_n \int f(x)\psi\left(n\left(x - \frac{2}{n}\right)\right)\,dx \geqslant \varepsilon_n \frac{1}{2n} f\left(\frac{3}{n}\right) = 1. \tag{46}$$

Противоречие. ■

2.2.2. Разбиение единицы

Теорема 2.13 (О разбиении единицы). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$ — открытое множество, а U_α — его открытое покрытие. Тогда существует набор $\{\psi_i\} \subset \mathcal{D}$ таких, что носитель каждой функции ψ_i лежит в некотором U_α (для разных i индекс α может быть различным), и таких, что*

1° $0 \leqslant \psi_i \leqslant 1$;

2° $\sum \psi_i(x) \equiv 1$ *на* Ω;

3° *Для всякого компакта $K \subset \Omega$ найдутся $i_1, \ldots, i_m$ и окрестность $U \supset K$ такие, что $\psi_{i_1} + \ldots + \psi_{i_m} = 1$ на U.*

□ Будет написано позже. ■

Определение. Такой набор функций $\{\psi_i\}$ называется *разбиением единицы*, подчинённым покрытию U_α.

2.2.3. Вторая конструкция разбиения единицы

Определение. Говорят, что покрытие $\{V_\beta\}$ *вписано* в покрытие $\{U_\alpha\}$, если всякое V_β целиком содержится в некотором U_α.

Определение. Покрытие U_α называется *локально конечным*, если для любой точки $x \in \bigcup U_\alpha$ над ней висит лишь конечное число элементов покрытия.

Простой пример $U_n := \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ показывает, что не из всякого покрытия можно выделить локально конечное. Однако во всякое покрытие можно вписать локально конечное. Доказательство этого факта мы пока предоставляем читателю.

Мы будем писать $U \Subset V$, если $\operatorname{Cl} U \subset V$.

Утверждение 2.14. *Пусть $\{U_i\}$ — локально конечное покрытие $\mathbb{R}$. Тогда найдётся разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{U_i\}$.*

□ Без ограничения общности можно считать U_i ограниченными. Впишем в $\{U_i\}$ покрытие $\{V_i\}$ такое, что $V_i \Subset U_i$: рассмотрим дополнение F_1 к множеству $U_2 \cup U_3 \cup \ldots$. Имеем $F_1 \subset U_1$. Теперь найдём $V_1 \supset F_1$ такое, что $V_1 \Subset U_1$. Заметим, что $V_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \ldots$ покрывают $\mathbb{R}$.

Аналогично, на k-м шаге рассмотрим дополнение F_k к множеству

$$V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{k-1} \cup U_{k+1} \cup U_{k+2} \cup \ldots. \tag{47}$$

и аналогично получим множество $V_{k+1} \Subset U_{k+1}$. И так далее.

Продолжение следует...

■

2.2.4. Носитель обобщённой функции

Определение. Говорят, что обобщённая функция F *равна нулю* на интервале I, если $\langle F, \varphi\rangle = 0$ для всех φ, у которых $\operatorname{supp}\varphi \subset I$.

Легко видеть, что в этом определении интервал можно заменить произвольным открытым множеством.

Определение. *Носителем* $\operatorname{supp} F$ обобщённой функции F называет дополнение к наибольшему открытому множеству $U \subset \mathbb{R}$, на котором $F = 0$.

Возникает вопрос: почему такое определение корректно, или, другими словами, почему носитель вообще существует? Ответ на него даёт следующее предложение.

Предложение 2.15. *Пусть $F = 0$ на каждом из открытых множеств U_α. Тогда она равна нулю на их объединении $U := \bigcup U_\alpha$.*

☐ Рассмотрим разбиение единицы $\{\psi_i\}$, подчинённое покрытию $\{U_\alpha\}$. Пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset U$. Тогда, поскольку $\sum \psi_i = 1$ в U, можно написать, что $\varphi = \sum \varphi\psi_i$. Поскольку $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт, в силу локальной конечности разбиения единицы найдутся такие $i_1, \ldots, i_m$, что $\psi_{i_1} + \ldots + \psi_{i_m} = 1$ в некоторой окрестности $\operatorname{supp}\varphi$, то есть в этой окрестности сумма $\sum \varphi\psi_i$ на самом деле конечна. Поэтому

$$\langle F, \varphi \rangle = \left\langle F, \sum_{k=1}^{m} \varphi\psi_{i_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \langle F, \varphi\psi_{i_k} \rangle = 0, \tag{48}$$

поскольку носитель каждой из функций $\varphi\psi_{i_k}$ лежит в некотором множестве U_α (а на каждом U_α функция F равна нулю по условию). ■

Определение. Точку x назовём *существенной* для F, если для любой окрестности $U(x)$ существует φ с носителем в U, для которой $\langle F, \varphi \rangle \neq 0$.

Задача 2.1. *Множество всех существенных точек совпадает с носителем функции F.*

2.3. Другие виды основных и обобщённых функций: пространства $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$

2.3.1. Пространство $\mathcal{E}$. Вложение $\mathcal{D}$ в $\mathcal{E}$

Введём в пространстве $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ систему полунорм: пусть K — компакт, тогда положим

$$\|\varphi\|_{K,m} := \max_K \left|\varphi^{(m)}(x)\right| = \left\|\varphi^{(m)}\right\|_{\mathbf{C}(K)}. \tag{49}$$

Пространство $\mathbf{C}^\infty$ с такой системой полунорм обозначим через $\mathcal{E}$. Скажем, что $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{E}$, если $\|\varphi_n\|_{K,m} \to 0$ для всех компактов K и для всех m.

Замечание. Естественно, что можно ограничиться только какой-нибудь счётной последовательностью компактов, исчерпывающих $\mathbb{R}$. Например, можно рассматривать не все компакты, а только отрезки $[-n, n]$, тогда множество полунорм будет счётно. В дальнейшем мы придумаем ещё более экономную систему полунорм.

Определение. Пространство $\mathcal{E}'$ — это пространство непрерывных линейных функционалов на пространстве основных функций $\mathcal{E}$.

Утверждение 2.16. *Пространство $\mathcal{D}$ непрерывно вкладывается в $\mathcal{E}$ и плотно в $\mathcal{E}$ по метрике $\mathcal{E}$.*

☐ Покажем непрерывность вложения: если $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}$, то последовательность их образов в $\mathcal{E}$ (то есть этих же самых функций, но рассматриваемых в другом пространстве) тоже сходится к нулю в $\mathcal{E}$. В самом деле, пусть $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-a, a]$ при всех n. По определению сходимости в $\mathcal{D}$, на отрезке $[-a, a]$ имеется равномерная сходимость к нулю всех производных функций φ_n. Значит, все полунормы в пространстве $\mathcal{E}$ тем более пойдут к нулю.

Докажем, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{E}$. Возьмём произвольную функцию из $\mathcal{E}$ и домножим её на гладкий индикатор ψ_n отрезка $[-n, n]$. Тогда при всяком фиксированном компакте K и фиксированном m имеем

$$\left\|\psi_n\varphi - \varphi\right\|_{K,m} = 0, \tag{50}$$

как только $K \subset [-(n+1), n+1]$. ■

Утверждение 2.17. *Имеет место вложение $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$ и $\mathcal{E}'$ плотно в $\mathcal{D}'$.*

☐ Пусть $F \in \mathcal{E}'$. Покажем, что её можно рассматривать и как обобщённую функцию на пространстве $\mathcal{D}$. Проблемы могут быть только с непрерывностью, потому что с областью определения всё заведомо хорошо: $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$.

Пусть $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}$. Тогда по только что доказанному утверждению, имеем $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{E}$. Но F — обобщённая функция на $\mathcal{E}$, поэтому она непрерывна, а значит, $\langle F, \varphi_n \rangle \to 0$. Но это и надо доказать.

Далее, пусть $F \in \mathcal{D}'$. Найдём последовательность обобщённых функций $\{F_n\}$ из $\mathcal{E}'$ такую, что $F_n \to F$ в $\mathcal{D}'$. Рассмотрим функции $F_n := \psi_n F$, где ψ_n — гладкий индикатор отрезка $[-n, n]$. Покажем, что это обобщённые функции из $\mathcal{E}'$. Действительно, возьмём $\{\varphi_k\} \subset \mathbf{C}^\infty$ такую, что $\varphi_k \to 0$ в $\mathcal{E}$. Легко видеть, что $\psi_n\varphi_k \to 0$ в $\mathcal{D}$ при $k \to \infty$, а, так как $F \in \mathcal{D}'$, получаем, что

$$\langle F_n, \varphi_k \rangle = \langle \psi_n F, \varphi_k \rangle = \langle F, \psi_n\varphi_k \rangle \to 0, \quad k \to \infty. \tag{51}$$

Далее, покажем, что $F_n \to F$ в $\mathcal{D}'$ при $n \to \infty$. Действительно, рассмотрим $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда

$$\langle F_n, \varphi \rangle = \langle \psi_n F, \varphi \rangle = \langle F, \psi_n\varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle, \tag{52}$$

как только $\operatorname{supp}\varphi \subset [-n, n]$. Таким образом, сходимость есть. ■

2.3.2. Ещё раз о системе полунорм в $\mathcal{E}$

Время идёт, и настала пора сэкономить на полунормах. Итак, начинаем перестройку...

Лемма 2.18 (О перестройке системы полунорм в $\mathcal{E}$). *Сходимость в пространстве $\mathcal{E}$ эквивалентна сходимости по системе полунорм*

$$P_m(\varphi) := \max_{k \leqslant m} \max_{x \in [-m,m]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|. \tag{53}$$

□ Для доказательства в одну сторону достаточно загнать компакт K в отрезок $[-m, m]$ и потребовать, чтобы порядок производной в определении старой полунормы не превосходил m, после чего требуемая оценка очевидна.

Обратно, пусть имеется сходимость по старой системе. Докажем, что будет сходимость и по новой. Для этого возьмём компакт побольше и запихнём в него отрезок $[-m, m]$. Осталось потребовать, чтобы $\|\varphi_n\|_{K,k} \leqslant \varepsilon$ при всех $k \leqslant m$. ■

Утверждение 2.19. *Пусть X — счётно-нормированное пространство с системой полунорм $\|\cdot\|_k$. Тогда X метризуемо.*

□ Введём в X метрику:

$$\rho(x, y) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\|x-y\|_m}{1 + \|x-y\|_m}. \tag{54}$$

То, что это метрика, легко проверяется (неочевидно только неравенство треугольника, да и то легко доказывается геометрически с использованием свойств выпуклости функции $\frac{x}{1+x}$).

Докажем эквивалентность сходимости. Если есть сходимость по такой метрике, то, очевидно, каждое слагаемое должно стремиться к нулю. Но тогда и полунормы устремятся к нулю в силу того, что $\frac{x}{1+x} \to 0$ тогда и только тогда, когда $x \to 0$.

Обратно, пусть все полунормы сходятся к нулю. Пусть нужно сделать расстояние меньше, чем 2ε. Поскольку $\frac{x}{1+x} < 1$, ряд мажорируется прогрессией, поэтому его хвост можно сделать меньше ε, начиная с некоторого n. Осталось дождаться, пока первые n полунорм станут в сумме меньше, чем ε, тогда сумма всего ряда не превзойдёт 2ε. ■

Утверждение 2.20. *Пусть $F \in \mathcal{E}'$. Тогда найдутся m и $C > 0$ такие, что*

$$|F(\varphi)| \leqslant C \cdot P_m(\varphi). \tag{55}$$

□ В силу непрерывности функционала F получаем, что если $\rho(0, \varphi) < \delta$, то и $|F(\varphi)| < 1$. В силу сходимости ряда, его остаток можно сделать малым при всех φ: выберем m_0 таким, чтобы сумма m_0-хвоста была меньше $\frac{\delta}{2}$. Выберем теперь δ_1 так, чтобы

$$\sum_{m=0}^{m_0} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{P_m(\varphi)}{1 + P_m(\varphi)} < \frac{\delta}{2}, \tag{56}$$

когда $P_{m_0}(\varphi) < \delta_1$. Заметим, что полунормы P_m монотонно возрастают, поэтому достаточно взять $\delta_1 < \frac{\delta}{4}$.

Итак, расстояние от φ до нуля не превосходит $\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$, когда $P_{m_0}(\varphi) < \frac{\delta}{4}$, поэтому для таких φ имеем $F(\varphi) < 1$. Пусть φ — произвольная функция. Если $P_{m_0}(\varphi) \neq 0$, то всё доказано: имеем

$$P_{m_0}\left(\frac{\delta_1}{P_{m_0}(\varphi)}\varphi\right) = \delta_1, \tag{57}$$

поэтому для функции $\frac{\delta_1}{P_{m_0}(\varphi)}\varphi$ имеем

$$\left|F\left(\frac{\delta_1}{P_{m_0}(\varphi)}\varphi\right)\right| < 1, \tag{58}$$

откуда в силу линейности функционала F получаем требуемую оценку

$$|F(\varphi)| < \frac{1}{\delta_1} \cdot P_{m_0}(\varphi). \tag{59}$$

Однако может получиться мелкая неприятность: если $P_{m_0}(\varphi) = 0$, то на ноль делить нехорошо. Но это не испортит нам жизнь: покажем, что в этом случае $F(\varphi) = 0$. Допустим, что это не так. Тогда, если $P_{m_0}(\varphi) = 0$, то и $P_{m_0}(k\varphi) = 0$. Но мы знаем, что когда $P_{m_0}(\varphi) < \frac{\delta}{4}$, то и $|F(\varphi)| < 1$. Таким образом, при всех k имеем $|F(k\varphi)| = k\,|F(\varphi)| < 1$. Но этого не может быть. ■

2.4. Структура обобщённых функций на $\mathcal{D}$

2.4.1. Обобщённые функции с компактным носителем

Мы уже знаем, что $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$. Теперь мы узнаем, какую именно часть они там составляют.

Теорема 2.21. *Обобщённые функции из $\mathcal{D}'$ с компактным носителем — это в точности функции из пространства $\mathcal{E}'$.*

□ Пусть $F \in \mathcal{E}'$. Покажем, что её носитель компактен. По предыдущему утверждению, найдётся m такое, что $|F(\varphi)| \leqslant C \cdot P_m(\varphi)$. Пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset \big(\mathbb{R} \setminus [-m,m]\big)$, тогда $P_m(\varphi) = 0$ и потому $F(\varphi) = 0$. Таким образом, $\operatorname{supp} F \subset [-m,m]$.

Обратно, пусть $F \in \mathcal{D}'$ и множество $K := \operatorname{supp} F$ компактно. Покажем, что F можно продолжить до непрерывного функционала на $\mathcal{E}$. Возьмём ограниченную окрестность U компакта K и рассмотрим гладкую финитную функцию ψ, равную 1 в этой окрестности. Положим

$$\widetilde{F}(\varphi) := F(\psi\varphi). \tag{60}$$

Проверим, что $\widetilde{F} \in \mathcal{E}'$ и что $\widetilde{F}$ продолжает F с $\mathcal{D}$ на $\mathcal{E}$. Пусть $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{E}$. Тогда $\psi\varphi_n \to \psi\varphi$ в $\mathcal{E}$ по формуле Лейбница. Но так как $\psi\varphi_n \in \mathcal{D}$, то уже из непрерывности F на $\mathcal{D}$ следует сходимость $\widetilde{F}(\varphi_n) \to \widetilde{F}(\varphi)$.

Покажем, что $\widetilde{F} = F$ на $\mathcal{D}$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда $\widetilde{F}(\varphi) - F(\varphi) = F(\psi\varphi) - F(\varphi) = F\big((\psi - 1)\varphi\big) = 0$, потому что $\operatorname{supp}(1-\psi) \cap \operatorname{supp} F = \varnothing$.

Тот факт, что от выбора окрестности U ничего не зависит, докажите самостоятельно. Это очевидно. ■

Задача 2.2. *Сходимость в $\mathcal{D}$ не метризуема.*

Решение. Вначале докажем лемму, которая полезна сама по себе.

Лемма 2.22. *Пусть (M,ρ) — метрическое пространство, $f_{ij} \in M$. Пусть*

$$\begin{gathered} f_{11},\ f_{12},\ f_{13},\ \ldots \to f_1, \\ f_{21},\ f_{22},\ f_{23},\ \ldots \to f_2, \\ \ldots \\ f_{n1},\ f_{n2},\ f_{n3},\ \ldots \to f_n, \\ \ldots \end{gathered} \tag{61}$$

Пусть последовательность $\{f_n\} \subset M$ тоже сходится к некоторой функции $f \in M$. Тогда можно выбрать из каждой строки таблицы по функции f_{ni_n} так, что $f_{n\,i_n} \to f$.

□ В силу сходимости в первой строке, существует номер i_1 такой, что $\rho(f_{1i_1}, f_1) < \frac{1}{2}$. Далее, в силу сходимости во второй строке, существует номер i_2 такой, что $\rho(f_{2i_2}, f_2) < \frac{1}{4}$. Продолжая аналогично, получим, что существует номер i_n такой, что $\rho(f_{ni_n}, f_n) < \frac{1}{2^n}$. Таким образом, $\rho(f_{ni_n}, f_n) \to 0$, но по условию $\rho(f_n, f) \to 0$. Отсюда следует, что пределы последовательностей f_{ni_n} и f_n совпадают (по неравенству треугольника). ■

Предположим, что в $\mathcal{D}$ можно ввести такую метрику ρ, что сходимость в $\mathcal{D}$ равносильна сходимости по этой метрике. Покажем, что в пространстве $\mathcal{D}$ утверждение леммы неверно. Пусть Γ_n — стандартный горб высоты 1, сосредоточенный на отрезке $[-n,n]$. В качестве таблицы функций рассмотрим $\{\Gamma_{nm}\}$, где $\Gamma_{nm} := \frac{1}{m}\Gamma_n$. Очевидно, что при всяком фиксированном n имеем $\Gamma_{nm} \to 0$ в $\mathcal{D}$ при $m \to \infty$. В то же время, любая выборка по одной функции из строки не может сходиться в $\mathcal{D}$, потому что носители «расползаются» вширь (это противоречит определению сходимости в $\mathcal{D}$). ■

2.4.2. Пространство L_1^*

Теорема 2.23. *Пусть M — измеримое подмножество в $\mathbb{R}$. Тогда $L_1^*(M) = L_\infty(M)$.*

□ Пусть сначала $M = I = (a,b)$. Рассмотрим линейный непрерывный функционал $\Phi\colon L_1(M) \to \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию

$$F(x) := \Phi(\mathbb{I}_{(a,x)}). \tag{62}$$

Она абсолютно непрерывна, потому что

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \|\Phi\| \cdot |x-y|. \tag{63}$$

Значит, для неё справедлива формула Ньютона–Лейбница, и она представляется интегралом

$$F(x) = \int\limits_a^x h(t)\,dt, \tag{64}$$

где $h = F'$ — некоторая локально суммируемая функция. Покажем, что она существенно ограничена. В самом деле, в силу липшицевости, производная функции F равномерно ограничена константой $\|\Phi\|$.

Осталось показать, что для произвольной функции $g \in L_1$ имеем

$$\Phi(g) = \int\limits_a^b h(t)g(t)\,dt. \tag{65}$$

Для индикаторов это уже проверено. По линейности это верно и для ступенчатых функций. Покажем, что это верно и для произвольных функций. Приблизим функцию $g \in L_1$ ступенчатыми функциями g_n. Тогда $\Phi(g_n) \to \Phi(g)$ в силу непрерывности функционала. С другой стороны, имеем

$$\Phi(g_n) = \int\limits_a^b h(t)g_n(t)\,dt \to \int\limits_a^b h(t)g(t)\,dt, \tag{66}$$

потому что

$$\Big|\int\limits_a^b h(t)g_n(t)\,dt - \int\limits_a^b h(t)g(t)\,dt\Big| \leqslant \|\Phi\| \cdot \|g_n - g\|_{L_1} \to 0. \tag{67}$$

Но последовательность $\Phi(g_n)$ не может иметь двух пределов, значит,

$$\Phi(g) = \int\limits_a^b h(t)g(t)\,dt, \tag{68}$$

что и требовалось доказать.

Для произвольных множеств $M \subset \mathbb{R}$ сделаем так: положим его в интервал (a, b), определим функционал на (a, b) и ограничим его на множество M. ■

Последнюю часть этой теоремы стоило бы написать поподробнее. Но это будет сделано позже.

2.4.3. Локальное устройство обобщённых функций из $\mathcal{D}'$

Пусть K — компакт. Символом $\mathcal{D}_K$ мы будем обозначать пространство функций, у которых $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.

Теорема 2.24. *Всякая функция $F \in \mathcal{D}'$ локально есть производная от непрерывной функции.*

□ Утверждение теоремы означает, что для любого компакта K существует непрерывная функция f такая, что на всех функциях из $\mathcal{D}_K$ имеем $\langle F, \varphi\rangle = \langle f^{(m)}, \varphi\rangle$.

Без ограничения общности, $K \subset (0, 1)$. Будем рассматривать функции, у которых $\operatorname{supp}\psi \subset (0, 1)$. Там, где это не оговорено противное, интегралы берутся по отрезку $(0, 1)$.

$$\max|\psi(x)| \leqslant \int \big|\psi'(t)\big|\,dt \leqslant \int \max\big|\psi'(t)\big|\,dt = \max|\psi'(x)|, \tag{69}$$

и аналогично,

$$\max\big|\psi^{(s-1)}(x)\big| \leqslant \int \big|\psi^{(s)}(t)\big|\,dt \leqslant \max\big|\psi^{(s)}(x)\big|. \tag{70}$$

Отсюда следует, что

$$\|\psi\|_m = \max_{s \leqslant m}\big|\psi^{(s)}(x)\big| \leqslant \int \big|\psi^{(m+1)}(t)\big|\,dt. \tag{71}$$

Рассмотрим гладкий индикатор $\mathbb{I}_K$ нашего компакта, такой, что $\operatorname{supp}\mathbb{I}_K \subset (0, 1)$. Тогда функция $G := \mathbb{I}_K \cdot F$ имеет компактный носитель, и для неё верна оценка $|G(\varphi)| \leqslant C\,\|\varphi\|_M$ для некоторого M. В силу полученного выше неравенства имеем

$$|G(\varphi)| \leqslant C \cdot \int \big|\psi^{(M+1)}(t)\big|\,dt. \tag{72}$$

Заметим, что финитная функция восстанавливается по своей производной однозначно. Значит, она восстанавливается и по $(n + 1)$-й производной. Рассмотрим функционал

$$\widetilde{G}\colon \varphi^{(M+1)} \mapsto G(\varphi), \text{ где } \varphi \in \mathcal{D}_K. \tag{73}$$

Он ограничен относительно нормы в L_1. Продолжим его до линейного непрерывного функционала на всём L_1. По доказанной ранее теореме он имеет вид

$$G(\varphi) = \int h(t)\varphi^{(M+1)}(t)\,dt = -\int f(t)\varphi^{(M+2)}(t)\,dt, \text{ где } f(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} h(t)\,dt. \tag{74}$$

Равенство обосновано финитностью φ и формулой интегрирования по частям. Но это ровно то, что нужно, поскольку на нашем компакте K функция G совпадает с F. ■

Для доказательства общего случая теоремы о структуре обобщённых функций с компактным носителем надо лишь воспользоваться разбиением единицы.

2.5. Преобразование Фурье обобщённых функций

2.5.1. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}$

Мы кое-что уже знаем про оператор Фурье $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Покажем, что он непрерывен. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$. Имеем

$$\max_\lambda \left|\lambda^k \widehat{\varphi}^{(m)}(\lambda)\right| = \max_\lambda \left|\mathcal{F}\left([x^m\varphi(x)]^{(k)}\right)(\lambda)\right| \leqslant \int \left|[x^m\varphi(x)]^{(k)}\right| dx \leqslant \sum c_{\alpha\beta} \int \left|x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)\right| dx =$$
$$= \sum c_{\alpha\beta} \int \frac{1+x^2}{1+x^2} \cdot \left|x^\alpha\varphi^{(\beta)}(x)\right| dx = \sum c_{\alpha\beta}\Big(\int \frac{\left|x^\alpha\varphi^{(\beta)}(x)\right|}{1+x^2}\,dx + \int \frac{\left|x^{\alpha+2}\varphi^{(\beta)}(x)\right|}{1+x^2}\,dx\Big). \tag{75}$$

А числители оцениваются соответствующими полунормами в $\mathcal{S}$, поэтому интегралы сходятся. Значит,

$$\|\widehat{\varphi}\|_{k,m} \leqslant \sum C_{\alpha\beta}\,\|\varphi\|_{\alpha,\beta}\,. \tag{76}$$

Теорема 2.25. *Оператор $G\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, коммутирующий с $\mathcal{M}$ (умножением на x), есть оператор умножения на некоторую функцию $\alpha(x) \in \mathbf{C}^\infty$. А если он еще и коммутирует с $\mathcal{D}$ (дифференцированием), то $\alpha(x) \equiv \mathrm{const}$.*

□ Нам потребуется одна несложная лемма.

Лемма 2.26. *Если $\varphi(a) = 0$, то $(G\varphi(a)) = 0$.*

□ Если у функции есть нуль в точке a, то она имеет вид $\varphi(x) = (x-a)\psi(x)$, где $\psi \in \mathbf{C}^\infty$. Заметим, что $\psi \in \mathcal{S}$, так как $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x-a}$, а функция φ убывает быстрее любой обратной степени. Имеем $\varphi = \mathcal{M}\psi - a\psi$ и $G\varphi = \mathcal{M}G\psi - aG\psi$. Но тогда $(G\varphi)(a) = a(G\psi)(a) - a(G\psi)(a) = 0$. ■

Докажем утверждение теоремы. Рассмотрим «горб» — гладкую функцию $\Gamma_a(x)$, которая равна 1 на отрезке $[a-1, a+1]$, и нулю вне интервала $(a-2, a+2)$. Положим $\alpha(a) := (G\Gamma_a)(a)$ — это будет некоторая функция. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) := \varphi(x) - \varphi(a)\cdot\Gamma_a(x). \tag{77}$$

У неё будет нуль в точке a, значит, по лемме имеем

$$(G\psi)(a) = G\big(\varphi(x) - \varphi(a)\cdot\Gamma_a(x)\big)(a) = (G\varphi)(a) - \varphi(a)\cdot(G\Gamma_a)(a) = 0 \quad\Rightarrow\quad (G\varphi)(a) = \varphi(a)\alpha(a). \tag{78}$$

Но это верно для любого a, поэтому $(G\varphi)(x) = \varphi(x)\alpha(x)$. Покажем теперь, что $\alpha(x) \in \mathbf{C}^\infty$. При любом $a \in \mathbb{R}$ имеем

$$(G\Gamma_a)(x) = \alpha(x)\Gamma_a(x). \tag{79}$$

Левая часть лежит в $\mathbf{C}^\infty$ по определению оператора G, а правая часть совпадает с $\alpha(x)$ на интервале $(a-1, a+1)$. В силу произвольности a это верно на всей прямой, значит, $\alpha(x) \in \mathbf{C}^\infty$.

Докажем второе утверждение. Имеем $\Gamma_a'(x) = 0$ на интервале $(a-1, a+1)$. Поэтому на этом интервале имеем

$$0 = (G\mathcal{D}\Gamma_a)(x) = \big(\alpha(x)\Gamma_a(x)\big)' = \alpha'(x). \tag{80}$$

Снова в силу того, что a произвольно, имеем $\alpha'(x) \equiv 0$. ■

Следствие 2.2. $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathrm{id}$.

□ Этот оператор коммутирует с $\mathcal{M}$ и с $\mathcal{D}$. Значит, это скалярный оператор λI. У него есть собственная функция $e^{-\frac{x^2}{2}}$ с собственным значением 1. Значит, $\lambda = 1$. ■

Тут на самом деле мухлёж: функция при двукратном применении оператора Фурье переворачивается. Просто функция $e^{-\frac{x^2}{2}}$ чётна, поэтому она переходит в себя. Впрочем, это не так важно.

Утверждение 2.27. *Пусть $h(x)$ — такая функция, что $h(x)e^{a|x|} \in L_1$, и $\int x^n h(x)\,dx = 0$ для всех $n \geqslant 0$. Тогда $h \overset{\text{п.в.}}{=} 0$.*

□ Это очевидно: преобразование Фурье $\widehat{h}$ от такой функции аналитически продолжается в полосу $|\operatorname{Im} z| < a$, а эти интегралы есть в точности производные от преобразования Фурье в нуле. Значит, по теореме единственности $\widehat{h} = 0$, а тогда $h \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. ■

Утверждение 2.28. *В пространстве $\mathcal{S}$ существует функция φ, для которой $\int x^n \varphi(x)\,dx = 0$ для всех n.*

□ Пользуясь тем, что $\mathcal{F}$ (а значит, и $\mathcal{F}^{-1}$) — изоморфизм $\mathcal{S}$, такую функцию мы легко получим, рассмотрев обратное преобразование Фурье от функции $\psi \in \mathcal{S}$, «плоской» в нуле, т. е. $\varphi := \mathcal{F}^{-1}\psi$, а $\psi \equiv 1$ в $U(0)$. ■

Следствие 2.3. *В пространстве $\mathcal{S}$ бывают такие функции φ, для которых $\varphi(x)e^{a|x|} \notin L_1$ ни при каком a.*

2.5.2. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$ и в $\mathcal{D}'$

Преобразование Фурье обобщённых функций определяется по аналогии другим операциям с обобщёнными функциями.

Определение. Пусть $f \in \mathcal{S}'$, а $\varphi \in \mathcal{S}$. Положим $\langle \widehat{f}, \varphi \rangle := \langle f, \widehat{\varphi} \rangle$.

Утверждение 2.29. *Оператор преобразования Фурье $*$-слабо непрерывен на $\mathcal{S}$.*

□ Пусть $f_n \to f$ на каждой тестовой функции $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда

$$\langle \mathcal{F} f_n, \varphi \rangle = \langle f_n, \mathcal{F}\varphi \rangle \to \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F} f, \varphi \rangle \,, \tag{81}$$

что и означает $*$-слабую непрерывность. ■

А вот в пространстве $\mathcal{D}'$ преобразование Фурье ведёт себя намного хуже. Прежде всего заметим такой прикольный факт: $\mathcal{F}(D) \cap D = \varnothing$. В самом деле, образ Фурье функции из $\mathcal{D}$ — это голоморфная функция, поэтому она не может быть нулём вне некоторого компакта, если она не нулевая.

Утверждение 2.30. *Не существует $*$-слабо непрерывного продолжения оператора Фурье до отображения $\mathcal{F}\colon \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$.*

□ Пусть существует оператор $\mathcal{A}\colon \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ с такими свойствами. Пусть $f \in \mathcal{D}'$, а $\psi_1 \in \mathcal{D}$. Тогда $(\mathcal{A}f)(\psi_1)$ как функция от f есть слабо непрерывный функционал на $\mathcal{D}'$. Но любой слабо непрерывный функционал на $\mathcal{D}'$ есть значение f на некоторой другой основной функции, то есть $(\mathcal{A}f)(\psi_1) = f(\psi_2)$. Теперь возьмём в качестве f функцию $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда

$$\int \psi_2 \varphi\,dx = \int \overline{\overline{\psi}}_1 \mathcal{F}\varphi\,dx = \int \mathcal{F}\overline{\psi}_1 \varphi\,dx. \tag{82}$$

Значит, $\psi_2 = \mathcal{F}\overline{\psi}_1$, чего не бывает, поскольку $\mathcal{D} \cap \mathcal{F}(\mathcal{D}) = \varnothing$. ■