Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лекторы: $\boxed{\text{В. А. Кондратьев,}}$ Ю. С. Ильяшенко

III–IV семестры, программа экзамена 2003–2004 г, варианты 2001–2009 г.

1. Программа экзамена

1.1. Первый семестр

Введение. Примеры. Элементарные методы интегрирования

1. Уравнения с разделяющимися переменными. Декартовы произведения двух систем.
2. Однородные уравнения. Их группа симметрий.
3. Линейные уравнения первого порядка. Преобразования монодромии и периодические решения линейных уравнений с периодическими коэффициентами.
4. Уравнения в полных дифференциалах. Гамильтоновы уравнения с одной степенью свободы. Маятник.

1.1.1. Теорема существования

1. Принцип сжимающих отображений.
2. Теорема существования, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных условий. Метод Пикара.
3. Сходимость пикаровских приближений к решению (будет использована во втором семестре при доказательстве гладкой зависимости решения от начального условия и теоремы о выпрямлении).
4. Теорема о продолжении интегральных и фазовых кривых. Её применение к линейным неавтономным системам. Формула Лиувилля – Остроградского.

1.1.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Однородные уравнения и уравнения со специальной правой частью.
2. Резонансы. Метод комплексных амплитуд.

1.2. Второй семестр

1.2.1. Линейные системы

1. Фазовые потоки. Экспонента линейного оператора.
2. Комплексификация и овеществление. Вычисление экспоненты. Экспонента комплексного числа. Экспонента жордановой клетки.

1.2.2. Теорема о выпрямлении и её следствия

1. Теорема существования и единственности (напоминание). Пикаровские приближения.
2. Производное отображение. Уравнение в вариациях по начальным условиям и параметрам. Гладкая зависимость решений от начальных условий и параметров.
3. Теорема о выпрямлении и её следствия. Полная система первых интегралов. Задача Коши для линейных и квазилинейных уравнений. Искажение фазового объёма.

1.2.3. Устойчивость. Фазовая плоскость

1. Устойчивость особых точек дифференциальных уравнений и неподвижных точек отображений.
2. Фазовая плоскость. Топология фазовых кривых. Отображение Пуанкаре. Предельные циклы. Теорема Флоке.

1.2.4. Детерминизм и хаос

1. Малые колебания. Плотные обмотки тора. Равенство пространственных и временных средних для иррационального поворота окружности.
2. Подкова Смейла. Элементы символической динамики.

2. Правила игры

Критерий выставления оценок, как правило, следующий:

$\geqslant 9$	$\geqslant 14$	$\geqslant 20$
«3»	«4»	«5»

В каждом варианте имеется не менее одного теоретического вопроса[1]. Для получения оценки «5» необходимо правильно ответить хотя бы на один теоретический вопрос или набрать не менее 25 баллов.

В случае, когда задача состоит из двух пунктов **1°** и **2°**, при проверке засчитывается только один из них. Если решены оба пункта, то выбирается максимальный балл.

3. Экзамен 2001 г.

3.1. Вариант 1

Задача 1. *(4): Найти и нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases} \tag{1}$$

Задача 2. *(1+1+1): Найти все особые точки системы (1). Линеаризовать векторное поле системы (1). Исследовать на устойчивость особые точки линеаризованной системы.*

Задача 3. *(4): Исследовать на устойчивость особые точки системы (1).*

Задача 4. *(5): Имеет ли система (1) непрерывный непостоянный первый интеграл в окрестности точки* $(0,0)$*?*

Задача 5. *(4): Выпрямить векторное поле системы (1) в окрестности точки* $(1,1)$*.*

Задача 6. *(2+2): Имеет ли в окрестности точки* $(1,1)$ *решение задача Коши*

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

с начальным условием: а) $u|_{x=1} = y$*, б)* $u|_{y=1} = x$*?*

Задача 7. *(5+3): Найти преобразование фазового потока системы (1) за время* t *там, где оно определено. Найти начальные условия для всех решений, определённых на всей оси времени.*

Задача 8. *(3): Доказать формулу Лиувилля – Остроградского.*

Задача 9. *(7): Доказать теорему Флоке.*

Задача 10. *(8): Вычислить координаты точки по её судьбе для отображения подковы Смейла.*

3.2. Вариант 2

Задача 11. *(4): Найти и нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^2. \end{cases} \tag{2}$$

Задача 12. *(1+1+3): Найти все особые точки системы (2). Линеаризовать векторное поле системы (2). Исследовать на устойчивость особые точки линеаризованной системы.*

Задача 13. *(5): Исследовать на устойчивость особые точки системы (2).*

Задача 14. *(2): Имеет ли система (2) непрерывный непостоянный первый интеграл в окрестности точки* $(0,0)$*?*

Задача 15. *(2+2): Имеет ли в окрестности точки* $(1,1)$ *решение задача Коши*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + (x - x^2)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

[1] Как показывает статистика, вопрос берётся из программы 4 семестра.

с начальным условием: а) $u|_{x=1} = y$, б) $u|_{y=1} = x$?

Задача 16. *(2): Решить уравнение $x^{(6)} + 64x = 0$.*

Задача 17. *(5): Найти все значения ω, при которых уравнение*

$$x^{(6)} + 64x = e^{\sqrt{3}t} \sin \omega t$$

имеет хотя бы одно решение, ограниченное на всей оси.

Задача 18. *(3): Доказать теорему о фазовом потоке линейного векторного поля; свойства нормы линейного оператора можно использовать без доказательства.*

Задача 19. *(9): Доказать теорему о равномерном распределении орбиты иррационального поворота окружности.*

4. Экзамен 29 июня 2001 г.

4.1. Вариант 1

Задача 1. *(4): Найти и нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x, \\ \dot{y} = \sin y. \end{cases} \tag{1}$$

Задача 2. *(5): Найти преобразование фазового потока системы (1) в квадрате $[0, \pi] \times [0, \pi]$.*

Задача 3. *(3): Найти все особые точки системы (1), исследовать их на устойчивость и указать их тип.*

Задача 4. *(5): Выпрямить векторное поле системы (1) в окрестности точки $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Задача 5. *(2): Решить уравнение $x^{(6)} - 64x = 0$.*

Задача 6. *(4): Найти решение уравнения*

$$x^{(4)} + 4x = e^{-t} \cos \omega t.$$

с неопределёнными коэффициентами. Ответ исследовать по ω. Неопределённых коэффициентов не находить.

Задача 7. *(3): Сформулировать и доказать принцип сжимающих отображений.*

4.2. Вариант 2

Задача 8. *(4): Найти и нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = -y + \sin x. \end{cases} \tag{2}$$

Задача 9. *(5): Найти преобразование фазового потока системы (2).*

Задача 10. *(4): При каком значении параметра a уравнение*

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -ay + \sin x$$

имеет единственное периодическое решение?

Задача 11. *(5): Найти все точки на прямой $y = 1$, в окрестности которых задача Коши*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (-y + \sin x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

имеет единственное решение для любых начальных условий.

Задача 12. *(3): Найти и исследовать на устойчивость особые точки системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y, \\ \dot{y} = -y + \sin x. \end{cases}$$

Задача 13. *(2): Найти e^{At}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Задача 14. *(3): Сформулировать теорему Ляпунова об устойчивости для уравнений и наметить план её доказательства.*

5. Экзамен 2002 г.

5.1. Вариант 1

Задача 1. *(2+3): Решить уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

и нарисовать его фазовые кривые.

Задача 2. *(1+2+3): Дана система*

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases} \tag{1}$$

Линеаризовать векторное поле системы (1) в особой точке $(0,0)$. *Исследовать устойчивость всех особых точек линеаризованной системы (1). Исследовать на устойчивость особую точку* $(0,0)$ *системы (1).*

Задача 3. *(2): Для системы (1) найти все полиномиальные первые интегралы. Разрешается угадать правильный ответ; то, что найдены ВСЕ полиномиальные первые интегралы, можно не доказывать.*

Задача 4. *(2+3): Найти и нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5z, \\ \dot{y} = 5z - 3x, \\ \dot{z} = 5x - 3z. \end{cases}$$

Задача 5. *(4): Найти фазовый поток системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y - 16, \\ \dot{y} = 5x - 3y. \end{cases}$$

Задача 6. *(4): Доказать теорему о гладкой зависимости решений от начальных условий.*

Задача 7. *(5): Доказать теорему Флоке.*

Задача 8. *(9): Найти замыкание траектории* $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *системы*

$$\ddot{x} = -\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x \quad \text{с начальным условием} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.2. Вариант 2

Задача 9. *(2): Нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x, \\ \dot{y} = 1 - y^2. \end{cases} \tag{2}$$

Задача 10. *(3+2): Исследовать на устойчивость особые точки системы (2) и определить их тип.*

Задача 11. *(6): В окрестности каждой из особых точек системы (2) найти хотя бы один непостоянный первый интеграл или доказать, что такового не существует.*

Задача 12. *(3): Нарисовать фазовый портрет уравнения Ньютона* $\ddot{x} = x - x^3$.

Задача 13. *(6): Найти все точки на начальной прямой* $y = 1$, *в окрестности которых задача Коши*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + (x - x^3)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=1} = x^2$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 14. *(4): Найти с неопределёнными коэффициентами частное решение уравнения*

$$x^{(4)} + 4x = e^t \sin \omega t.$$

Ответ исследовать по ω. *Неопределённых коэффициентов не находить.*

Задача 15. *(5): Доказать теорему о частном решении линейного уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью в нерезонансном случае.*

Задача 16. *(9): Определить отображение подковы. Доказать теорему о бесконечности числа периодических орбит. Теорему о реализации любой последовательности как судьбы точки сформулировать, но не доказывать.*

5.3. Вариант 3

Задача 17. *(3): Найти периодическое решение уравнения*

$$\ddot{x} - \dot{x} + 25x = \cos\omega t \tag{3}$$

и доказать, что оно единственно.

Задача 18. *(3): Нарисовать график амплитуды периодического решения уравнения (3) как функцию от ω.*

Задача 19. *(4): Дано уравнение*

$$\dot{x} = (x-1)^{\alpha}.$$

При каких значениях $\alpha > 0$ решение, проходящее через точку $(t, x) = (0, 1)$, единственно?

Задача 20. *(4): Найти все особые точки системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 25; \\ \dot{y} = xy - 12, \end{cases}$$

исследовать их на устойчивость и указать их тип.

Задача 21. *(3): Доказать теорему о фазовом потоке линейного векторного поля.*

Задача 22. *(4): Указать все точки на прямой $y = 3$, в окрестности которых задача Коши*

$$(x^2 + y^2 - 25)\frac{\partial u}{\partial x} + (xy - 12)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=3} = f(x)$$

имеет решение при любом начальном условии $f(x)$.

5.4. Вариант 4

Задача 23. *(4): Найти и нарисовать фазовые кривые уравнения Ньютона*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin x + \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

Задача 24. *(3): Найти особые точки системы (4) и исследовать их на устойчивость.*

Задача 25. *(3): При каких значениях параметра ω система*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin\omega t, \\ \dot{y} = x. \end{cases} \tag{5}$$

имеет хотя бы одно периодическое решение?

Задача 26. *(4): Найти общее решение системы (5) при $\omega = 2$.*

Задача 27. *(3): Доказать теорему о выпрямлении векторного поля.*

Задача 28. *(4): Найти мультипликатор предельного цикла уравнения, записанного в полярных координатах:*

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = 1, \\ \dot{r} = 1 - r. \end{cases}$$

Нарисовать этот предельный цикл и фазовые кривые в его окрестности.

6. Экзамен 30 августа 2002 г.

6.1. Вариант 1

Задача 1. *Найти преобразование фазового потока системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Задача 2. *Найти все значения a, для которых начало координат является устойчивой по Ляпунову особой точкой векторного поля*

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax, \\ \dot{y} = (a-1)\sin y. \end{cases}$$

Задача 3. *В окрестности какой из точек а) $(0,1)$ б) $(1,0)$ задача Коши для уравнения*

$$(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x} - 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

при начальных условиях, задаваемых на кривой $x^2+y^2=1$, имеет единственное решение для любого гладкого начального условия?

Задача 4. *Найти решение предыдущей задачи при $u|_{x^2+y^2=1} = y|_{x^2+y^2=1}$ в окрестностях а) и б).*

Задача 5. *Выпрямить векторное поле*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = e^y \end{cases}$$

на $\mathbb{R}^2$ в окрестности точки $(1,1)$.

Задача 6. *Найти производную по параметру μ при $\mu = 0$ решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x - y + \mu \sin t, \\ \dot{y} = x - \ln(1-y) \end{cases} \quad \text{с начальным условием} \quad \begin{cases} x(0) = \cos\mu - 1, \\ y(0) = \sin\mu. \end{cases}$$

Задача 7. *Найти и нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^3. \end{cases} \tag{1}$$

Задача 8. *Найти все особые точки системы (1) и указать их тип.*

Задача 9. *Сформулировать и доказать теорему о равномерном распределении иррационального поворота окружности.*

6.2. Вариант 2

Задача 10. *Найти преобразование фазового потока системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Задача 11. *Найти все значения a, для которых начало координат является неустойчивой по Ляпунову особой точкой векторного поля*

$$\begin{cases} \dot{x} = a \operatorname{tg} x, \\ \dot{y} = -(1+a)y. \end{cases}$$

Задача 12. *В окрестности какой из точек а) $(0,1)$ б) $(1,0)$ задача Коши для уравнения*

$$(x^2-y^2)\cdot u_x + 2xy \cdot u_y = 0$$

при начальных условиях, задаваемых на кривой $x^2 + y^2 = 1$ имеет единственное решение для любого гладкого начального условия?

Задача 13. *Найти решение предыдущей задачи при $u|_{x^2+y^2=1} = y|_{x^2+y^2=1}$ в окрестностях а) и б).*

Задача 14. *Выпрямить векторное поле*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x, \\ \dot{y} = y^3 \end{cases}$$

на $\mathbb{R}^2$ в окрестности точки $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Задача 15. *Найти производную по параметру μ при $\mu = 0$ решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y - \mu \sin t, \\ \dot{y} = \sin x + y^3 \end{cases} \quad \text{с начальным условием} \quad \begin{cases} x(0) = 1 - \cos\mu, \\ y(0) = \sin\mu. \end{cases}$$

Задача 16. *Найти и нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2 - 1. \end{cases} \tag{2}$$

Задача 17. *Найти все первые интегралы системы из задачи (2), указать их тип.*

Задача 18. *Сформулировать и доказать формулу Лиувилля – Остроградского.*

6.3. Вариант 3

Задача 19. *Найти фазовую траекторию векторного поля на плоскости, проходящую при $t = 0$ через точку $(0, 1)$:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x + 4y. \end{cases}$$

Задача 20. *Найти все особые точки векторного поля*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2 - 1. \end{cases}$$

Задача 21. *В окрестности какой из точек а) $(0, 1)$ б) $(1, 0)$ задача Коши для уравнения*

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + (y+1)x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

при начальных условиях, задаваемых на кривой $x^2 + y^2 = 1$ имеет единственное решение для любого гладкого начального условия?

Задача 22. *Найти решение предыдущей задачи при $u|_{x^2+y^2=1} = y|_{x^2+y^2=1}$ в окрестностях а) и б).*

Задача 23. *Выпрямить векторное поле*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$$

в окрестности точки $(1, 1)$.

Задача 24. *Найти производную по параметру μ при $\mu = 0$ решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos x - 1 + y, \\ \dot{y} = x + e^y - 1 + \mu e^t \end{cases} \quad \text{с начальным условием} \quad \begin{cases} x(0) = \cos\mu - 1, \\ y(0) = \sin\mu. \end{cases}$$

Задача 25. *Найти и нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(y+1), \\ \dot{y} = x^2 - y. \end{cases} \tag{3}$$

Задача 26. *Найти все первые интегралы системы (3), определённые на всей плоскости.*

Задача 27. *Экспонента коммутирующих операторов.*

7. Экзамен 2003 г.

7.1. Вариант 1

7.1.1. Часть первая

Задача 1. *(2): Нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 1 - x^2. \end{cases} \tag{1}$$

Задача 2. *(3): Найти все особые точки системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 1 - x^2 - y, \end{cases} \tag{2}$$

исследовать их на устойчивость и определить их тип.

Задача 3. *(5): Нарисовать фазовый портрет системы (2).*

Задача 4. *(4): Найти решение системы (1) с начальным условием* $(2, 0)$.

Задача 5.
1° *(3): Найти все непрерывные первые интегралы системы (2) в окрестности точки* $(0, 1)$.
2° *(6): Найти производную* $\frac{\partial x}{\partial a}$ *при* $a = 0$ *первой компоненты решения системы (1) с начальным условием*

$$\begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

7.1.2. Часть вторая

Задача 6. *(3): Найти частное решение с неопределёнными коэффициентами уравнения*

$$x^{(6)} + 64x = \sin 2t.$$

и общее решение соответствующего однородного уравнения.

Задача 7. *(4): При каких значениях* ω *уравнение*

$$x^{(6)} + 64x = \sin \omega t.$$

имеет хотя бы одно ненулевое решение, ограниченное на всей оси?

Задача 8. *(6): Пусть* $f(x) = \sin^2 x + \cos^{2003} x$. *Найти предел*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Задача 9. *(3): Доказать теорему об искажении фазового объёма. Формулу Лиувилля – Остроградского можно считать известной.*

Задача 10. *(6): Найти все периодические точки периода 2 для отображения подковы из лекции 14.*

7.2. Вариант 2

7.2.1. Часть первая

Задача 11. *(2): Найти все* 2π*-периодические решения уравнения*

$$\dot{x} = 2x + \sin t. \tag{3}$$

Задача 12. *(3): Найти преобразование монодромии уравнения (3) за период.*

Задача 13. *(2+3): Для любого* $m \in \mathbb{N}$ *найти* m*-е пикаровское приближение к решению начальной задачи*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

где $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, а $x \in \mathbb{R}^n$. Вывести из полученной формулы теорему о существовании e^{At} при малых t.

Задача 14. *(6): Пусть $\varphi(t, x)$ — решение системы*

$$\begin{cases} \dot x_1 = -2\sin x_1 + 3\sin x_3, \\ \dot x_2 = -2\sin x_2 + \sin x_3, \\ \dot x_3 = -2\sin x_3 + \sin^2 x_2 \end{cases} \tag{4}$$

с начальным условием $\varphi(0, x) = x$. Найти

$$X(t) = \left.\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{5}$$

Задача 15. *(5+4): Судьба точки p под действием отображения подковы (лекция 14) имеет вид*

$$\omega = \ldots\, \omega_{-n} \,\ldots\, \omega_0 \,\ldots\, \omega_n \,\ldots, \tag{6}$$

причём $\omega_n = 1$ при $|n| > 5$. Найти предельные точки орбиты точки p под действием отображения подковы. Сколько точек удовлетворяют условию задачи?

7.2.2. Часть вторая

Задача 16. *(3): Нарисовать фазовый портрет системы*

$$\begin{cases} \dot x = x + x^2, \\ \dot y = -y. \end{cases} \tag{7}$$

Задача 17. *(6): Найти хотя бы один непостоянный первый интеграл системы (7), определённый на всей плоскости.*

Задача 18. *(5): Разрешима ли задача Коши*

$$(x + x^2)\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{x+y=1} = x$$

в окрестности точки $\left(\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2}\right)$.

Задача 19. *(3): Доказать принцип сжимающих отображений.*

Задача 20. *(4): Останется ли верным принцип сжимающих отображений, если в его формулировке отказаться от условия полноты?*

8. Основной экзамен 14 июня 2004 г.

8.1. Вариант 1

8.1.1. Часть первая

Задача 1. *(4): Найти общее решение системы*

$$\begin{cases} \dot x = 1, \\ \dot y = -y + \sin x. \end{cases} \tag{1}$$

Задача 2. *(3+1): Найти фазовый поток системы (1). Сохраняет ли он объём?*

Задача 3. *(2+1): Выпрямить векторное поле системы (1) в окрестности точки $(0, 0)$. Ответ проверить.*

Задача 4. *(5): Сколько 2π-периодических решений имеет уравнение*

$$\dot x = -ax + \frac{\sin t}{2 + \sin t}?$$

Ответ исследовать в зависимости от a.

Задача 5. *(5): Вывести теорему Ляпунова об устойчивости для векторных полей из теоремы Ляпунова об устойчивости для отображений.*

8.1.2. Часть вторая

Задача 6. *Пусть*

$$A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 1 \\ 2a & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = A(a)x. \tag{2}$$

1° *(6+1): При каких значениях a уравнение (2) имеет непостоянные периодические решения? С каким периодом?*

2° *(4): Найти решение уравнения (2) при $a = 4$ с начальным условием $\vec{x}(0) = (4, 0, 4)$.*

Задача 7. *(5): Исследовать на устойчивость особую точку 0 уравнения (2) при $a = -5$.*

Задача 8. *(6+2): Рассмотрим арифметическую прогрессию, разность которой равна $\sqrt[3]{a}$. Верно ли, что при $a = \frac{1}{9}$ в множество*

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[n, n + \frac{1}{2004} \right]$$

попадает бесконечно много членов этой прогрессии? Верно ли аналогичное утверждение при $a = \frac{1}{8}$?

8.2. Вариант 2

8.2.1. Часть первая

Задача 9. *(2): Найти общее решение уравнения*

$$\dot{x} = 1 + a^2x^2, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Задача 10. *(5): При каких значениях вещественных параметров a и b фазовый поток уравнения*

$$\dot{x} = 1 + a^2x^2 + bx^4$$

определён на всей прямой для всех значений времени? Найти этот поток для этих значений параметра.

Задача 11. *(2+1): Выпрямить векторное поле уравнения (3) при $a = 2$ на всей прямой. Ответ проверить.*

Задача 12. *(5): Может ли уравнение Ньютона*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}$$

иметь предельные циклы, если $f \in \mathbf{C}^1$?

Задача 13. *(5): Доказать основную теорему теории линейных автономных уравнений. Все нужные для доказательства свойства нормы линейных операторов можно считать известными.*

8.2.2. Часть вторая

Задача 14.

1° *(3): Найти экспоненту линейного оператора*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

2° *(5+1): Найти экспоненту оператора Лапласа Δ в пространстве $\mathcal{P}_n$ тригонометрических многочленов степени не выше n, то есть в пространстве функций вида*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Какова размерность этого пространства?

Задача 15.

1° *(4): Исследовать на устойчивость особую точку 0 уравнения $\dot{x} = Ax$, где A — оператор (4).*

2° *(6): Будет ли устойчивой особая точка 0 уравнения*

$$\dot{p} = \Delta p, \quad p \in \mathcal{P}_n?$$

Задача 16. *(1+7): Сколько периодических точек имеет отображение подковы из лекции 14? Может ли хотя бы одна из этих точек иметь хотя бы одну иррациональную координату?*

9. Экзамен 28 июня 2004 г.

9.1. Вариант 1

Задача 1. *(2+2+2): Найти и нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2, \\ \dot{y} = y^2. \end{cases} \tag{1}$$

Найти все начальные условия, при которых решение системы определено на всей оси времени.

Задача 2. *(2+2+1): Дана система*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(x-1)(x-2). \end{cases} \tag{2}$$

Нарисовать фазовые кривые системы. Есть ли у системы особые точки, устойчивые по Ляпунову? Есть ли среди особых точек асимптотически устойчивые?

Задача 3. *(4): При каких ω все решения уравнения $x^{(4)} + 5\ddot{x} + 6x = \sin \omega t$ ограничены на всей оси времени?*

Задача 4. *(5): Сформулировать и доказать теорему Ляпунова об устойчивости для отображений в случае, когда линейная часть отображения в точке имеет попарно различные собственные значения. Доказывать только достаточность условий устойчивости.*

10. Экзамен 4 июня 2009 г.

10.1. Вариант 1

10.1.1. Часть первая

Задача 1. *(3): Нарисовать фазовый портрет системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5x + x^2 \end{cases} \tag{1}$$

Задача 2. *(3): Найти общее решение уравнения*

$$u_x y + u_y(5x + x^2) = 0. \tag{2}$$

Задача 3. *(4): Существует ли решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными условиями $u|_{y=1} = \sin x$, определённое во всей полуплоскости $y \geqslant 1$?*

Задача 4. *(4): В системе (1) найти периоды малых колебаний и углы наклона сепаратрис.*

Задача 5. *(6): Будет ли полная энергия системы (1) убывать вдоль фазовых кривых возмущенной системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5x + x^2 - 0.1y \quad ? \end{cases} \tag{3}$$

Нарисовать фазовый портрет системы (3).

10.1.2. Часть вторая

Задача 6. *(5): Теорема об искажении фазового объема.*

Задача 7. *(5): Найти преобразование фазового потока для системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y + 2z, \\ \dot{z} = z \end{cases} \tag{4}$$

Задача 8. *(4): Найти производную по параметру ε при $\varepsilon = 0$ решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 + \varepsilon t \sin t, \\ \dot{y} = 2xy + \varepsilon^2 \frac{\sin t}{t} \end{cases} \tag{5}$$

с начальным условием $x(0) = y(0) = 0$.

Задача 9. *(6): Найти судьбу точки $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ под действием отображения подковы из лекции 6 мая 2009 г.*

10.2. Вариант 2

10.2.1. Часть первая

Задача 10. *(3): Найти и нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases} \tag{6}$$

Задача 11. *(4): Найти особые точки системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(2x + y), \\ \dot{y} = \sin(-x + 2y) \end{cases} \tag{7}$$

и исследовать их на устойчивость.

Задача 12. *(3+2): Найти частное решение уравнения*

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = e^{2t} \sin t. \tag{8}$$

а) Неопределённые коэффициенты не находить.
б) Найти неопределённые коэффициенты.

Задача 13. *(4): Найти производную в точке* 0 *преобразования фазового потока за время* π *системы (7).*

Задача 14. *(4): Выпрямить векторное поле системы (6) в окрестности точки* $(1, 1)$.

10.2.2. Часть вторая

Задача 15. *(5): Сформулировать теорему о решении линейной системы с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазимногочлена. Дать доказательство в нерезонансном случае.*

Задача 16. *(4): Нарисовать фазовые кривые системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2(1 - x)^2, \\ \dot{y} = y \end{cases} \tag{9}$$

Задача 17. *(5): Верно ли, что все первые интегралы системы (9), непрерывные на всей плоскости, постоянны?*

Задача 18. *(6): Нарисовать замыкание на плоскости траектории системы*

$$\begin{cases} \ddot{x} = -y, \\ \ddot{y} = 2x - 3y \end{cases} \tag{10}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$.

Последняя компиляция: 18 июня 2010 г.
Обновления документа — на сайтах http://dmvn.mexmat.net,
http://dmvn.mexmat.ru.
Об опечатках и неточностях пишите на dmvn@mccme.ru.