МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Курс лекций по комплексному анализу

Лектор — Валерий Константинович Белошапка

III курс, 6 семестр, поток математиков

Москва, 2005 г.

Оглавление

Предисловие

Этот документ представляет собой переработанный курс лекций по комплексному анализу, первоначально набранный одним из студентов МехМата. В оригинальном варианте не было иллюстраций, что осложняло восприятие материала, а кроме того, имелось отличное от нуля количество опечаток и прочих глюков типографского характера. Спасибо А. Басалаеву, А. Веремьёву, А. Шапиро и Андрею (`avolk07@mail.ru`) за ценные замечания и исправления.

Данная версия документа обладает одним важным свойством: она была отредактирована самим лектором, что немного сильно количество опечаток и неточностей.

Порядок изложения материала наиболее соответствует курсу 2005 г.

Release notes

В настоящее время переработка дошла до теоремы Абеля. Из раздела про эллиптические функции остался только синус Якоби. В последней редакции внесены правки 2010 года от Андрея.

Последняя компиляция: `6 июля 2010 г.`
Обновления документа — на сайтах `http://dmvn.mexmat.net`, `http://dmvn.mexmat.ru`.
Об опечатках и неточностях пишите на `dmvn@mccme.ru`.

Литература

[1] Б. В. Шабат. *Введение в комлексный анализ.* — Наука, 1985. 3-е изд.

[2] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. *Методы ТФКП.* — Физматгиз, 1958.

[3] А. Гурвиц, Р. Курант. *Теория функций.* — Наука, 1968.

[4] В. Б. Алексеев, *Теорема Абеля в задачах и решениях.* — Наука, 1976.

[5] Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. *Лекции по ТФКП.* — Наука, 1989.

[6] И. Кра. *Автоморфные формы и клейновы группы.* — Мир, 1975.

[7] Э. Б. Винберг. *Курс алгебры.* — М.: Факториал, 2002.

1. Гармонические функции. Гидродинамика

1.1. Связь гармонических и голоморфных функций

1.1.1. Гармонические функции

Определение. *Оператором Лапласа* называется дифференциальный оператор $\Delta := \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Функция $u \in \mathbf{C}^2(D)$ называется *гармонической* в области D, если $\Delta u = 0$. Множество гармонических функций будем обозначать через $\mathcal{H}$.

Очевидно, множество $\mathcal{H}$ есть линейное пространство. В случае одной переменной гармоническими функциями являются в точности функции вида $y(x) = ax + b$. Для двух переменных гармонические функции являются решениями задачи о форме мембраны, натянутой на контур, и обладают экстремальным свойством: площадь поверхности графика гармонической функции с заданными значениями на границе области минимальна. С физической точки зрения гармоническая поверхность минимизирует энергию поверхностного натяжения. Из физических соображений можно сделать много полезных выводов о свойствах гармонических функций (таких, как принцип максимума), но в дальнейшем мы докажем все эти свойства средствами комплексного анализа.

1.1.2. Восстановление голоморфной функции по гармонической вещественной части

Далее мы будем рассматривать гармонические функции двух переменных. Их можно трактовать как функции комплексного переменного. Имеем

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{2\frac{\partial}{\partial z}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}. \tag{1}$$

Рассмотрим голоморфную функцию $f = u + iv$ и её вещественную часть. Покажем, что функция $u = \operatorname{Re} f$ гармонична. Действительно, запишем условия Коши–Римана для функции f: $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$. Тогда $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$, так как вторые частные производные непрерывны.

Выясним теперь, обратимо ли это свойство.

Утверждение 1.1. *Пусть D — односвязная область, и дана функция $u \in \mathcal{H}(D)$. Тогда найдётся такая гармоническая функция v, что функция $f = u + iv$ будет голоморфной в области D.*

□ Пусть f существует. Из уравнений Коши–Римана $g := f' = u_x - iu_y$. Пусть F — первообразная к g. Имеем $F' = g$, $u_x = \operatorname{Re} g = \operatorname{Re} f' = \operatorname{Re} F' = (\operatorname{Re} F)_x$ и $u_y = -\operatorname{Im} g = -\operatorname{Im} f' = -\operatorname{Im} F' = (\operatorname{Re} F)_y$, то есть функция $u - \operatorname{Re} F$ имеет тождественно нулевые частные производные, значит, она постоянна. Таким образом, мы нашли голоморфную функцию F, удовлетворяющую нашим требованиям. ■

Замечание. Функция f восстанавливается неоднозначно (например, к ней можно добавить мнимую константу). Если же область не была односвязной, то мы лишаемся однозначности функции f (хотя локально это свойство выполнено: достаточно малая окрестность гомеоморфна кругу и потому односвязна, а в ней первообразная будет однозначной).

Явное выражение для функции f в односвязной области можно получить следующим образом: рассмотрим форму $\omega := -u_y\, dx + u_x\, dy$. Тогда $d\omega = \Delta u\, dx \wedge dy = 0 \cdot dx \wedge dy = 0$. Фиксируем точку $a \in D$ и положим $v(z) := \int_a^z \omega$. Односвязность области гарантирует нам независимость значения функции от пути интегрирования.

Определение. Вещественная и мнимая часть голоморфной функции f называются *сопряжёнными* гармоническими функциями.

1.2. Свойства гармонических функций

1.2.1. Аналоги свойств голоморфных функций

Выведем некоторые свойства гармонических функций из свойств голоморфных функций.

Пусть $u \in \mathcal{H}(D)$. Так как $u = \operatorname{Re} f$, где $f \in \mathcal{O}(D)$, то функция u вещественно-аналитична.

Теорема 1.2 (о среднем). *Пусть $u \in \mathcal{H}(D)$. Тогда значение этой функции в центре круга C_r, целиком лежащего в области D, есть её среднее значение на окружности:*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\varphi})\, d\varphi = \frac{1}{\pi r^2}\int_{C_r} u\, dx \wedge dy. \tag{2}$$

□ Пусть $u = \operatorname{Re} f$, а C_r — круг радиуса r с центром в точке a. По теореме Коши

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{3}$$

Но выражение в условии теоремы есть в точности вещественная часть написанного равенства. ■

Теорема 1.3 (обратная к теореме о среднем). *Если для некоторой функции $u(z) \in \mathbf{C}^2(D)$ выполнено утверждение теоремы о среднем, то функция $u(z)$ гармонична.*

□ Напишем формулу Тейлора для функции $u(z)$ до членов второго порядка:

$$u(x, y) = A_0 + B_1 x + B_2 y + C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + o(x^2 + y^2). \tag{4}$$

Пользуясь линейностью пространства $\mathcal{H}$, отбросим линейную часть в силу ее гармоничности. Функции $x^2 - y^2$ и xy тоже гармоничны, поэтому можно их тоже выкинуть (с подходящими коэффициентами). Поэтому можно считать, что у нас исходно была функция вида $u(x, y) = Cx^2 + o(x^2 + y^2)$. Для простоты будем считать, что мы пишем условие теоремы о среднем для точки $a = 0$, так как иначе бы можно было написать разложение Тейлора с центром в другой точке. По условию значение в центре равно нулю, поэтому

$$0 = \int\limits_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\, d\varphi = Cr^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 \varphi\, d\varphi + o(r^2). \tag{5}$$

При $r \to 0$ правая часть должна стремиться к нулю. Но с другой стороны, $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 \varphi\, d\varphi > 0$. Значит, $C = 0$, а это и означает, что $\Delta u = 0$. ■

Теорема 1.4 (единственности). *Если гармоническая функция равна нулю в некоторой окрестности, то она тождественно равна нулю.*

□ Пусть $u = \operatorname{Re} f$. Из условий Коши – Римана имеем $f(z) = iC$ в окрестности (так как вещественная часть равна нулю), а по комплексной теореме единственности функция $f(z)$ равна этой константе и во всей области. т. е. $u = \operatorname{Re} f = 0$ во всей области. ■

Замечание. Для совпадения гармонических функций в области недостаточно их совпадения на последовательности точек: функция $u(x, y) = x$ гармонична и постоянна на множестве прямых $\{x = \mathrm{const}\}$.

Теорема 1.5 (принцип максимума). *Если функция $u \in \mathcal{H}(D)$ в некоторой внутренней точке достигает нестрогого локального максимума, то она постоянна.*

□ Пусть $u = \operatorname{Re} f$. Рассмотрим функцию $g := \exp f$. Тогда у функции g в данной точке будет максимум модуля, а потому она постоянна. Значит, $f \equiv \mathrm{const}$ и $u \equiv \mathrm{const}$. ■

Теорема 1.6 (Лиувилля). *Если функция $u \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ограничена во всей плоскости сверху или снизу, то $u \equiv \mathrm{const}$.*

□ Пусть $u = \operatorname{Re} f$ и $u \leqslant M$. Рассмотрим функцию $g := \exp f$. Тогда функция $|g|$ ограничена, и по комплексной теореме Лиувилля функция g постоянна, а вместе с ней постоянна и функция f. Случай $u \geqslant M$ разбирается аналогично. ■

Утверждение 1.7. *Композиция голоморфной и гармонической функции гармонична: $u \in \mathcal{H}(D)$ и $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, тогда $u\big(f(\zeta)\big) \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

□ Пусть $u = \operatorname{Re} F$. Тогда функция $F(f)$ голоморфна, а потому $\operatorname{Re} F(f)$ гармоническая. ■

1.2.2. Особые точки гармонических функций

Рассмотрим гармоническую функцию $u(x, y)$ и голоморфную функцию $f = u + iv$. Пусть она имеет особую точку a. Будем продолжать аналитически нашу функцию, обходя вокруг особой точки. При возвращении в точку отправления, вообще говоря, может получиться другая функция. Но вещественная часть аналитического продолжения есть функция u, которая однозначна. Следовательно, приращение будет чисто мнимым. Это приращение равно некоторой мнимой константе $i\Gamma$ (следует из уравнения Коши – Римана).

Это наблюдение уже подсказывает нам, что всё это очень похоже на $\operatorname{Ln} z$. Рассмотрим функцию

$$g(z) := \exp\left(\frac{2\pi}{\Gamma} f(z)\right). \tag{6}$$

Покажем, что она однозначна. В самом деле, после обхода вокруг точки имеем

$$\widetilde{g}(z) = \exp\left(\frac{2\pi}{\Gamma}\widetilde{f}(z)\right) = \exp\left(\frac{2\pi}{\Gamma}(f(z) + i\Gamma)\right) = \exp\left(\frac{2\pi}{\Gamma}f(z)\right)\cdot\exp\left(2\pi i\right) = \exp\left(\frac{2\pi}{\Gamma}f(z)\right), \tag{7}$$

поскольку $\exp(2\pi i) = 1$. Тогда

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln g(z), \quad u = \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{Re}\ln g(z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln|g(z)|. \tag{8}$$

Возможны три случая для поведения функции u в окрестности особой точки a.

- Если функция u ограничена, то она доопределяется в точке a по непрерывности, тем самым имеем устранимую особенность.
- $u(z) \to \infty$ при $z \to a$. Вспомним, что $u(z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln|g(z)|$. Если функция g имеет нуль в точке a, то $u(z) \to -\infty$, а если полюс, то $u(z) \to +\infty$. Точнее говоря, пусть $g(z) = (z-a)^k\varphi(z)$, где φ голоморфна в полной окрестности точки a и $\varphi(a) \neq 0$. Тогда

$$u(z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln|g(z)| = \frac{\Gamma}{2\pi}(k\ln|z-a| + \ln|\varphi(z)|) = \frac{k\Gamma}{2\pi}\ln|z-a| + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln|\varphi(z)|. \tag{9}$$

  Очевидно, функция $\frac{\Gamma}{2\pi}\ln|\varphi(z)|$ имеет устранимую особенность в точке a.
- Функция u не имеет предела в точке a. Тогда $g(z)$ имеет существенную особенность и применима теорема Сохоцкого. Например, функция $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ порождает гармоническую функцию $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. В достаточно малой окрестности точки a она «заметает» всю вещественную ось (найдётся подпоследовательность $z_n \to a$, для которой $u(z_n) \to b$ для $\forall\, b \in \mathbb{R}$.

1.2.3. Задача Дирихле

Комплексный анализ, а точнее, формула Коши позволяет почти без выкладок выписать решение задачи Дирихле в виде интеграла. Напомним, что в этой задаче ищется функция $u \in \mathcal{H}(D) \cap \mathbf{C}(\overline{D})$, такая, что $u\Big|_{\partial D} = \varphi$.

Докажем, что если решение задачи Дирихле существует (мы этого еще не знаем, но скоро узнаем), и область ограничена, то оно единственно. Действительно, пусть u_1 и u_2 — два решения. Тогда их разность $v := u_1 - u_2$ гармонична и на границе равна нулю. По принципу максимума $v \equiv 0$.

Для неограниченных областей это не верно. пример: $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ и $u_\lambda := \lambda y$. При разных λ имеем разные решения, и функции u_λ гармоничны.

Докажем теперь существование решения для ограниченной односвязной области D. Переведём её конформно в единичный круг Δ. Так как композиция конформного отображения и гармонической функции гармонична, а конформное отображение продолжается до гомеоморфизма областей с границами, мы свели задачу к аналогичной задаче для круга с некоторыми другими граничными данными ψ. Пусть u — искомое решение. В силу односвязности круга найдётся голоморфная (однозначная) функция f на этом круге, для которой $u = \operatorname{Re} f$. Запишем интегральную формулу Коши для точки $z \in \Delta$ и для точки z^*, полученной из z симметрией относительно единичной окружности по формуле $z^* = \frac{1}{\overline{z}}$. Далее везде $\zeta := re^{i\varphi}$ для краткости. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - z}\,d\varphi, \text{ где } \zeta = e^{i\varphi}. \tag{10}$$

Теперь запишем ту же формулу для точки z^*. Так как точка z^* лежит вне круга и подинтегральная функция будет голоморфной, имеем

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}\,d\zeta = 0. \tag{11}$$

Вычтем этот интеграл из первого (то есть на самом деле ничего не вычтем). Под интегралом будет выражение

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - \frac{1}{\overline{z}}} = \frac{\zeta(\zeta - \frac{1}{\overline{z}} - \zeta + z)}{(\zeta - z)(\zeta - \frac{1}{\overline{z}})} = \frac{\zeta(z\overline{z} - 1)}{(\zeta - z)(\zeta\overline{z} - 1)} = \frac{1 - z\overline{z}}{(\zeta - z)(\frac{1}{\zeta} - \overline{z})} = \frac{1 - z\overline{z}}{(\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z})} = \frac{1 - z\overline{z}}{(\zeta - z)\overline{(\zeta - z)}}$$

То есть

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - \frac{1}{\overline{z}}} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}. \tag{12}$$

Тогда выражение (10) перепишется в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\,d\varphi. \tag{13}$$

Выделим вещественную часть. Имеем

$$\operatorname{Re} f(z) = u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(e^{i\varphi})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2}\,d\varphi. \tag{14}$$

Это и есть решение для круга (так называемая *формула Пуассона*). Остаётся применить к полученной функции u конформное отображение, переводящее Δ в исходную область.

Кроме того, заметим, что

$$\frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} = \operatorname{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} \tag{15}$$

Это соотношение можно проверить, например, следующим способом:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2};\quad \operatorname{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{\zeta}+\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\right) = \frac{1}{2(\zeta-z)\overline{(\zeta-z)}}((\zeta+z)(\overline{\zeta}-\overline{z}) + (\zeta-z)(\overline{\zeta}+\overline{z})) =$$

$$\frac{1}{2|\zeta-z|^2}(\zeta\overline{\zeta} + z\overline{\zeta} - \zeta\overline{z} - z\overline{z} + \zeta\overline{\zeta} - z\overline{\zeta} + \zeta\overline{z} - z\overline{z}) = \frac{2\zeta\overline{\zeta} - 2z\overline{z}}{2|\zeta-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$$

Поэтому $f(z)$ можно определить формулой

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(e^{i\varphi})\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\varphi + iC, \tag{16}$$

где C – некоторая вещественная константа (две голоморфные функции с одинаковыми действительными частями отличаются на мнимую константу). Это выражение называется *формулой Шварца.*

Теорема 1.8. *Полученная функция u непрерывно выходит на границу области, т. е. если $z \to \zeta_0 \in \partial\Delta$, то $u(z) \to u(\zeta_0)$.*

□ Введём обозначение

$$P(\zeta, z) := \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}. \tag{17}$$

Имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} P(\zeta, z)\,d\varphi = 1, \tag{18}$$

так как функция $u \equiv 1$ гармонична. Заметим, что $P(\zeta, z) \to 0$ при $z \to \zeta_0 \neq \zeta$ (это видно из предыдущей формулы: числитель стремится к нулю, а знаменатель — нет), причём сходимость равномерна по ζ на каждой дуге γ, не содержащей точку ζ_0.

Рассмотрим разность

$$d := \int\limits_0^{2\pi} u(\zeta)P(\zeta, z)\,d\varphi - u(\zeta_0) \overset{!}{=} \int\limits_0^{2\pi}\big(u(\zeta) - u(\zeta_0)\big)P(\zeta, z)\,d\varphi. \tag{19}$$

Переход «!» обеспечен равенством (18), от умножения на константу $u(\zeta_0)$ хуже не будет.

В силу непрерывности функции u на границе для $\forall\,\varepsilon$ найдётся δ такое, что $|u(\zeta) - u(\zeta_0)| < \varepsilon$ при $|\varphi - \varphi_0| \leqslant 2\delta$. Пусть $\gamma_1 := \big\{\zeta = e^{i\varphi}\colon |\varphi - \varphi_0| \leqslant 2\delta\big\}$, а $\gamma_2 := \partial\Delta \smallsetminus \gamma_1$. На дуге γ_1 имеем

$$\Big|\int\limits_{\gamma_1}\big(u(\zeta) - u(\zeta_0)\big)P(\zeta, z)\,d\varphi\Big| < \varepsilon\int\limits_{\gamma_1} P(\zeta, z)\,d\varphi < \varepsilon\int\limits_{\partial\Delta} P(\zeta, z)\,d\varphi = \varepsilon\cdot 1 = \varepsilon. \tag{20}$$

Теперь разберёмся с дугой γ_2. Пусть $z = re^{i\theta}$ и $|\theta - \varphi_0| < \delta$. Тогда найдётся $\rho \in (0,1)$ такое, что если $r \in (1-\rho, 1)$, то $P(\zeta, z) < \varepsilon$ для всех $\zeta \in \gamma_2$. Тогда

$$\Big| \int\limits_{\gamma_2} \big(u(\zeta) - u(\zeta_0)\big) P(\zeta, z)\, d\varphi \Big| < 2M \int\limits_{\gamma_2} P(\zeta, z)\, d\varphi < 2M\varepsilon \cdot 2\pi, \tag{21}$$

где $M = \max\limits_{\partial\Delta} u$. Значит, $|d| \leqslant (1 + 4\pi M)\varepsilon$. ■

1.3. Гидродинамическое доказательство теоремы Римана

1.3.1. Векторные поля и голоморфные функции

Будем рассматривать гладкие векторные поля на плоскости и интерпретировать их как поля скоростей потока жидкости. Пусть $\vec{V} = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ — поле класса $\mathbf{C}^1$. Рассмотрим некоторый гладкий контур γ и функции

$$\begin{aligned} \Pi(\gamma) &:= \int\limits_{\gamma} (V, \vec{n})\, ds = \int\limits_{\gamma} \underbrace{-Q\, dx + P\, dy}_{\omega_1}, \\ \mathrm{B}(\gamma) &:= \int\limits_{\gamma} (V, \vec{\tau})\, ds = \int\limits_{\gamma} \underbrace{P\, dx + Q\, dy}_{\omega_2}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к контуру, а $\vec{\tau}$ — касательный вектор к γ.

Определение. Функция Π называется *потоком* поля через контур γ, а B — *вихрем*.

Пусть $\gamma = \partial D$. По формуле Грина имеем

$$\Pi(\gamma) = \iint\limits_D (P_x + Q_y)\, dx\, dy, \quad \mathrm{B}(\gamma) = \iint\limits_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy. \tag{23}$$

Пусть течение жидкости безвихревое и не имеет источников и стоков. Тогда $\mathrm{B} = \Pi = 0$. Но если это верно для любой области D, это значит, что подынтегральные выражения равны нулю:

$$\begin{cases} \operatorname{div} V = P_x + Q_y = 0, \\ \operatorname{rot} V = Q_x - P_y = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Это означает замкнутость задаваемых ими дифференциальных форм. Пусть область D односвязна, тогда эти формы точны, т. е. являются чьими-то дифференциалами. Тогда рассмотрим функции

$$u(z) := \int\limits_{z_0}^{z} \omega_1, \quad v(z) := \int\limits_{z_0}^{z} \omega_2. \tag{25}$$

Определение. Функция u называется *потенциалом поля*, а v — *функцией тока*.

В силу односвязности путь интегрирования в определении не важен. Название функции v объясняется тем, что жидкость течёт по линиям уровня этой функции. Действительно, жидкость течёт по решениям дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y), \\ \dot{y} = Q(x,y). \end{cases} \tag{26}$$

Тогда $\frac{d}{dt} v\big(x(t), y(t)\big) = \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{y} = -QP + PQ = 0$, то есть функция v постоянна на траекториях системы. Аналогично, для u получаем $\frac{d}{dt} u\big(x(t), y(t)\big) = \frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y} = PP + QQ \geqslant 0$ — потенциал растет на траекториях движения частиц жидкости.

Определение. Функция $f := u + iv$ называется *комплексным потенциалом* поля.

Комплексный потенциал будет голоморфной функцией, так как $u_x = P = v_y$ и $u_y = Q = -v_x$, то есть условия Коши–Римана выполнены. Отметим также, что $V = P + iQ = \overline{f'}$, то есть зная потенциал f, можно найти векторное поле V. Отсюда

$$\int\limits_{\gamma} f'\, dz = \int\limits_{\gamma} (P - iQ)(dx + i\, dy) = \int\limits_{\gamma} P\, dx + Q\, dy + i \int\limits_{\gamma} -Q\, dx + P\, dy = \mathrm{B}(\gamma) + i\Pi(\gamma). \tag{27}$$

1.3.2. Примеры

1. Рассмотрим функцию $f(z) = \ln z = \ln|z| + i\arg z$. Её вещественная часть $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ будет гармонической.
2. Функция $f_1(z) = \ln z$ представляет собой комплексный потенциал векторного поля, соответствующего перетеканию жидкости из 0 в ∞. Для неё В $= 0$, а П $= 2\pi$. Функция $f_2(z) = i\ln z$ представляет собой потенциал поля, для которого линиями уровня являются линии тока функции f_1 (и наоборот). Для f_2 всё наоборот: В $= 2\pi$, а П $= 0$ — жидкость крутится вокруг нуля (и бесконечности тоже).

   Теперь переведём конформным преобразованием $\ln\frac{z+h}{z-h}$ точки 0 и ∞ в точки h и $-h$, и устремим h к нулю. При этом будем увеличивать поток: $\Pi \cdot 2h = m$. Тогда жидкость будет перетекать из точки h в точку $-h$. В пределе получится диполь — семейство окружностей, касающихся в точке 0 по обе стороны от вещественной оси.
3. Постоянное векторное поле соответствует перетеканию жидкости из ∞ в ∞.

1.3.3. Теорема Римана

Рассмотрим произвольную область G (не обязательно односвязную), и поместим в некоторую её внутреннюю точку диполь (см. пример выше). Из физических соображений следует, что рано или поздно в области образуется установившееся течение жидкости. Пусть наше поле безвихревое, то есть В $= 0$. У него есть комплексный потенциал $w = f(z) = u(z) + iv(z)$. Это голоморфная функция с единственным полюсом первого порядка в нашей области.

Из физических же соображений ясно, что если вода обтекает препятствие (то есть дырку в области), то найдётся такая точка на границе дырки, что левее её жидкость обтекает препятствие с одной стороны, а правее — с другой. Линия тока, которая упирается в эту точку, называется *сепаратрисой* (от слова *separate* — разделять).

Комплексный потенциал постоянен вдоль траекторий, значит, эта функция переводит траектории в семейство прямых, параллельных оси абсцисс. Условие $B = 0$ гарантирует нам, что не возникнет неоднозначности у мнимой части. Сепаратрисам деваться некуда, и они тоже перейдут в семейство прямых, из которых выкинуто некоторое семейство отрезков. Таким образом, получилось конформное отображение f на плоскость с разрезами, параллельными вещественной оси. Но если область была односвязной, то разрез будет единственным (он будет соответствовать одной сепаратрисе, упиравшейся во внешнюю границу области, а такую область отобразить конформно на круг уже совсем просто.

2. Многомерный комплексный анализ

2.1. Голоморфные функции многих переменных

2.1.1. Определения, простейшие свойства

Рассмотрим функции вида $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $f(\vec{z}) = f(z_1, \ldots, z_n)$. Введём обозначения: $|z|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$. Шаром, как обычно, будем называть множество $B(a,r) := \{z\colon |z-a| < r\}$.

Определение. Область в $\mathbb{C}$ вида $\Delta_r(a) = \{|z_i - a_i| < r_i\}$, где $a \in \mathbb{C}^n$, а $r \in (\mathbb{R}_+)^n$ называется *полидиском.* Она является декартовым произведением одномерных дисков. Подмножество границы $\{|z_i - a_i| = r_i\}$ называется *остовом* полидиска. Мы будем обозначать остов Δ через $\operatorname{Sk}\Delta$.

Далее везде, где это не указано, суммирование ведётся по всем переменным, то есть от 1 до n.

Как и в одномерном случае, будем использовать обозначения

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \tag{1}$$

$$\partial f := \sum f_{z_j}\, dz_j, \quad \overline{\partial} f := \sum f_{\overline{z}_j}\, d\overline{z}_j. \tag{2}$$

Пусть функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой, тогда

$$df = \sum_{j=1}^{n}\left(f_{x_j}dx_j + f_{y_j}dy_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(f_{z_j}dz_j + f_{\overline{z}_j}d\overline{z}_j\right) = \partial f + \overline{\partial} f. \tag{3}$$

Определение. Функция f называется *голоморфной* в области D, если $\overline{\partial} f \equiv 0$ всюду в D.

Очевидно, голоморфная функция является голоморфной по каждому аргументу при фиксированных остальных, так как $f_{\overline{z}_j} = 0$ при всех j.

2.1.2. Кратная интегральная формула Коши

Пусть $f \in \mathcal{O}(D)$, где $D = D_1 \times \ldots \times D_n$. Зафиксируем все переменные, кроме первой, и применим обычную формулу Коши. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta_1 - z_1}\, d\zeta_1. \tag{4}$$

Но на этом, мы, конечно, не остановимся. Продолжим равенство, применив формулу для переменной z_2:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\partial D_1} \int\limits_{\partial D_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \ldots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)\cdot(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_2\, d\zeta_1. \tag{5}$$

Под интегралом у нас хорошая функция, поэтому применима теорема Фубини. В итоге имеем

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D_1 \times \ldots \times \partial D_n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{\prod(\zeta_j - z_j)}\, d\vec{\zeta}. \tag{6}$$

Это и есть многомерная формула Коши.

Рассмотрим голоморфную форму степени n:

$$\omega = f(z_1, \ldots, z_n)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n, \quad f \in \mathcal{O}(D). \tag{7}$$

Покажем, что её дифференциал $d\omega$ равен нулю. Действительно, имеем $d\omega = df \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, а $df = \sum f_{z_j}\, dz_j$ (коэффициенты при $d\overline{z}_j$ равны нулю в силу голоморфности). Следовательно, в выражении для дифференциала $d\omega$ тоже не будет слагаемых, содержащих $d\overline{z}_j$, зато в каждом слагаемом будет пара одинаковых дифференциалов dz_j. Но всем хорошо известно, что $dz \wedge dz = 0$. Значит, $d\omega = 0$.

Отсюда и из теоремы Стокса вытекает, что

$$\int\limits_{\partial\sigma} \omega = \int\limits_{\sigma} d\omega = \int\limits_{\sigma} 0 = 0. \tag{8}$$

2.2. Свойства голоморфных функций

2.2.1. Степенные ряды для функций многих переменных

Будем рассматривать кратные степенные ряды вида

$$\sum_m c_m (z-a)^m := \sum_{m_1, \ldots, m_n} c_{m_1 \ldots m_n} (z_1 - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - a_n)^{m_n}, \tag{9}$$

где $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $|m| := m_1 + \ldots + m_n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Рассмотрим кратную геометрическую прогрессию

$$\sum_{m_j \geqslant 0} q_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{m_n}. \tag{10}$$

Имеем

$$\sum_{m_j \geqslant 0} q_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{m_n} = \lim \left[\sum_{m_1 = 0}^{N_1} q_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot \sum_{m_n = 0}^{N_n} q_n^{m_n} \right] = \lim \left[\frac{1 - q_1^{N_1 + 1}}{1 - q_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - q_n^{N_n + 1}}{1 - q_n} \right] = \frac{1}{1 - q_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1 - q_n}. \tag{11}$$

Аналогично случаю одной переменой, доказывается

Лемма 2.1 (Абеля). *Если в точке $\widehat{z} \neq a$ члены ряда равномерно ограничены, то есть $|c_m(\widehat{z} - a)^m| \leqslant M$, то при $z \in \Delta(a, r)$, где $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_j = |\widehat{z}_j - a_j|$, ряд (9) сходится равномерно.*

☐ Как и в одномерном случае, имеем

$$\begin{gathered} |c_{m_1 \ldots m_n} (z_1 - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - a_n)^{m_n}| = \\ = \left| c_{m_1 \ldots m_n} (\widehat{z}_1 - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\widehat{z}_n - a_n)^{m_n} \cdot \left(\frac{z_1 - a_1}{\widehat{z}_1 - a_1} \right)^{m_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{z_n - a_n}{\widehat{z}_n - a_n} \right)^{m_n} \right| \leqslant \\ \leqslant M \cdot \left| \frac{z_1 - a_1}{\widehat{z}_1 - a_1} \right|^{m_1} \cdot \ldots \cdot \left| \frac{z_n - a_n}{\widehat{z}_n - a_n} \right|^{m_n}, \end{gathered} \tag{12}$$

то есть общий член мажорируется кратной геометрической прогрессией со знаменателем $q_j < 1$, и ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. ■

2.2.2. Разложение голоморфной функции в ряд

Рассмотрим область D и полидиск $\Delta(\vec{a},\vec{r}) \subset D$. Как и в одномерном случае, представим дробь $\frac{1}{\zeta_j - z_j}$ в виде суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\zeta_j - z_j} = \frac{1}{(\zeta_j - a_j) - (z_j - a_j)} = \frac{1}{\zeta_j - a_j} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j}} = \frac{1}{\zeta_j - a_j} \cdot \sum_{m_j=0}^{\infty} \left(\frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j}\right)^{m_j} = \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{(z_j - a_j)^{m_j}}{(\zeta_j - a_j)^{m_j+1}}. \qquad (13)$$

Рассмотрим функцию $f \in \mathcal{O}(D)$. Напишем для неё формулу Коши, интегрируя по полидиску $\widetilde{\Delta} \Subset \Delta$ (чтобы точка ζ не подбиралась слишком близко к остову бóльшего полидиска).

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\operatorname{Sk}\widetilde{\Delta}} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\prod(\zeta_j - z_j)}\, d\vec{\zeta}. \qquad (14)$$

Для каждой из дробей $\frac{1}{\zeta_j - z_j}$ применим написанное разложение. Получим

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\operatorname{Sk}\widetilde{\Delta}} \sum_m f(\zeta) \prod_{j=1}^{n} \frac{(z_j - a_j)^{m_j}}{(\zeta_j - a_j)^{m_j+1}}\, d\vec{\zeta}. \qquad (15)$$

Поскольку $f \in \mathcal{O}(\Delta)$, то $|f| \leqslant M$ на $\widetilde{\Delta}$, а так как $\widetilde{\Delta} \Subset \Delta$, то $\frac{|z_j - a_j|}{|\zeta_j - a_j|} \leqslant q_j < 1$, и ряд мажорируется прогрессией:

$$\left| f(\zeta) \cdot \frac{1}{\zeta_j - a_j} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{(z_j - a_j)^{m_j}}{(\zeta_j - a_j)^{m_j}} \right| \leqslant \underbrace{M \cdot \prod r_j}_{\text{const}} \cdot q_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{m_n}. \qquad (16)$$

Значит, по лемме Абеля имеется равномерная сходимость, и можно поменять порядок интегрирования и суммирования. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_m \int\limits_{\operatorname{Sk}\widetilde{\Delta}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\prod(\zeta_j - a_j)^{m_j+1}} \prod_{j=1}^{n} (z_j - a_j)^{m_j}. \qquad (17)$$

2.2.3. Область сходимости

Определение. Полидиск $\Delta(a, r)$ называется *полидиском сходимости*, а $r = (r_1, \dots, r_n)$ — набором *сопряжённых радиусов сходимости*, если в $\Delta(a, r)$ ряд сходится, и в любом полидиске $\Delta(a, R)$, где $R_j > r_j$ для некоторого j (а остальные радиусы такие же), ряд расходится.

Иными словами, полидиск является полидиском сходимости, если его нельзя «раздуть» по некоторой координате, сохраняя сходимость и не уменьшая при этом других радиусов.

Определение. *Область сходимости* степенного ряда — внутренность множества точек сходимости.

Название «область» корректно: это множество открыто (по определению) и связно (почти очевидно).

Далее для простоты будем рассматривать ряды с центром в нуле.

Из леммы Абеля следует, что если точка z принадлежит области сходимости, то вместе с ней там лежат точки вида $(e^{i\varphi_1} z_1, \dots, e^{i\varphi_n} z_n)$. Таким образом, вместе с каждой точкой в области сходимости лежит полидиск $\Delta\big(0, (|z_1|, \dots, |z_n|)\big)$, и область сходимости есть объединение полидисков сходимости.

Задача 2.1. *Написать ряд, областью сходимости которого является единичный шар.*

Пример 2.1. Рассмотрим ряд $\sum z_1^{m_1} z_2^{m_2}$. Его область сходимости есть множество $\{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$.

Пример 2.2. Область сходимости ряда $\sum z_1^{m_1} z_2$ есть множество $\{|z_1| < 1\} \times \mathbb{C}$.

Пример 2.3. Область сходимости ряда $\sum (z_1 z_2)^m$ есть множество $\{|z_1 z_2| < 1\}$.

Пример 2.4. Пусть $c_{m_1,m_2} = \frac{(m_1+m_2)!}{m_1! \cdot m_2!}$. Рассмотрим ряд с коэффициентами c_{m_1,m_2}. Если он сходится в некоторой точке, то суммировать можно в любом порядке, поэтому

$$\sum_{m_1,m_2} \frac{(m_1 + m_2)!}{m_1! \cdot m_2!} z_1^{m_1} z_2^{m_2} = \sum_{m=0}^{\infty} (z_1 + z_2)^m. \qquad (18)$$

Следовательно, если $|z_1 + z_2| \geqslant 1$, то ряд заведомо расходится. Значит, условие на сопряжённые радиусы будет таким: $r_1 + r_2 = 1$.

2.2.4. Логарифмическая выпуклость

Рассмотрим образ области сходимости ряда под действием преобразования

$$\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \xmapsto{\varphi} (\ln|z_1|, \ldots, \ln|z_n|). \tag{19}$$

Определение. Говорят, что область *логарифимически выпукла*, если её образ при отображении φ есть выпуклое множество.

Очевидно, что образ полидиска $\Delta(0, r)$ при отображении φ есть множество

$$\{x\colon x_j < \ln r_j\} = (-\infty, \ln r_1) \times \ldots \times (-\infty, \ln r_n). \tag{20}$$

Теорема 2.2. *Область Ω сходимости степенного ряда логарифимически выпукла.*

□ Пусть в точках a и b общий член ряда $\sum c_m z^m$ ограничен, то есть

$$|c_{m_1\ldots m_n} a_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{m_n}| \leqslant M, \quad |c_{m_1\ldots m_n} b_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot b_n^{m_n}| \leqslant M. \tag{21}$$

Рассмотрим точку ζ такую, что

$$\ln|\zeta_j| = t\ln|a_j| + (1-t)\ln|b_j|, \quad t \in [0, 1], \tag{22}$$

то есть $\varphi(\zeta)$ лежит на отрезке $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Покажем, что ряд сходится и в точке ζ. Имеем $|\zeta_j| = |a_j|^t \cdot |b_j|^{1-t}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|c_{m_1\ldots m_n}\zeta_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{m_n}| = \left|c_{m_1\ldots m_n} \left(a_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{m_n}\right)^t \left(b_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot b_n^{m_n}\right)^{1-t}\right| = \\ = |c_m|^t \cdot |c_m|^{1-t} \cdot |a^m|^t \cdot |b^m|^{1-t} = |c_m a^m|^t \cdot |c_m b^m|^{1-t} \leqslant M^t M^{1-t} = M.\end{aligned} \tag{23}$$

Поскольку a и b входят в область Ω с окрестностью, можно найти $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ из области сходимости такие, что $|a_j| < |\widetilde{a}_j|$ и $|b_j| < |\widetilde{b}_j|$ для всех j. Тогда найдётся точка $\widetilde{\zeta}$ такая, что $\varphi(\widetilde{\zeta}) \in [\varphi(a), \varphi(b)]$, $|\zeta_j| < |\widetilde{\zeta}_j|$, а значит, точка ζ принадлежит области сходимости по лемме Абеля. ■

Задача 2.2. *Описать логарифмически выпуклую оболочку области* $\big\{\Delta\big(0, (1, 2)\big) \cup \Delta\big(0, (2, 1)\big)\big\}$.

2.2.5. Эквивалентные определения голоморфной функции

Мы уже знаем, что из голоморфности следует представимость функции интегралом Коши, а из неё — разложимость в ряд. Остаётся замкнуть круг и показать, что представимость степенным рядом влечёт голоморфность. Действительно, степенной ряд $\mathbb{R}$-дифференцируем (с сохранением области сходимости). Точно также, как и в одномерном случае, можно показать, что $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = 0$. Частные производные ряда по x_j и по y_j отличаются только множителем i, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial}{\partial x_j} + i\sum \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum + i^2 \sum\right) = \frac{1}{2}\left(\sum - \sum\right) = 0. \tag{24}$$

Замечание. Можно показать (теорема Хартогса), что для голоморфности достаточно так называемой сепаратной аналитичности, то есть требования $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = 0$ для всех j, но мы этого делать не будем.

2.2.6. Стандартные теоремы о голоморфных функциях

Как и в одномерном случае, справедлива формула Коши – Адамара

$$\overline{\lim}\ \sqrt[m]{|c_{m_1,\ldots,m_n}| r_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot r_n^{m_n}} = 1, \text{ где } m = m_1 + \ldots + m_n. \tag{25}$$

Доказательство ничем не отличается, так как мы переходим к модулям и все рассуждения повторяются.

Сходящиеся ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз. Они сходятся равномерно на каждом компакте внутри области сходимости, что гарантирует непрерывность и голоморфность по каждому аргументу.

Из возможности почленного дифференцирования немедленно получаем, что всякий степенной ряд есть ряд Тейлора для порождаемой им функции, и верна формула для коэффициентов:

$$c_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{1}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_n!} \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}}. \tag{26}$$

Теорема 2.3 (единственности). *Если функция f равна нулю в полномерной окрестности $U \subset \Omega$, где Ω — область сходимости, то $f \equiv 0$ во всей области сходимости.*

□ Рассмотрим множество E тех точек, где степенной ряд равен нулю. Это множество открыто, так как в каждой точке есть полидиск сходимости (с ненулевым набором радиусов), и замкнуто, так как это множество нулей непрерывной функции. Рассмотрим произвольную точку z_0 в области, соединим её кривой с некоторой точкой множества E. Кривая компактна, поэтому расстояние ρ от неё до границы положительно, а значит, в каждой точке кривой нам гарантирован радиус сходимости ряда не меньше $r := \frac{\rho}{2}$. Кривую можно накрыть конечным числом полидисков радиуса r, а на множестве E коэффициенты разложения нулевые, значит, они нулевые и в r-окрестности кривой. Значит, $z_0 \in E$, т. е. $\Omega = E$. ■

Замечание. Условие полномерности окрестности существенно: функция $f(z_1, z_2) = z_1 z_2$ голоморфна и равна нулю на объединении прямых $\{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}$, но $f \not\equiv 0$.

Задача 2.3. *Если функция $f(z_1, z_2)$ равна нулю на множестве $\{z_1 = \overline{z}_2\}$, то $f \equiv 0$.*

Теорема 2.4 (Принцип максимума). *Если голоморфная функция достигает в некоторой точке нестрогого локального максимума модуля, то $f \equiv \mathrm{const}$.*

□ Рассмотрим точку $a \in \mathbb{C}^n$, в которой достигается максимум, и произвольный вектор $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$. Проведём прямую $z(t) = a + t\vec{v}$, где $t \in \mathbb{C}$, и рассмотрим функцию $g(t) = f(a + t\vec{v})$. Она, очевидно, голоморфна и имеет максимум модуля. Но это уже функция одной переменной, стало быть, она постоянна. Значит, $f = C$ на любой прямой, проходящей через точку a, и эта константа одинакова для всех прямых и равна $f(a)$. ■

Теорема 2.5 (Неравенство Коши). *Пусть функция f ограничена по модулю константой M в полидиске сходимости $\Delta(0, \vec{r})$. Тогда имеет место оценка коэффициентов её степенного ряда:*

$$|c_{m_1,\dots,m_n}| \leqslant \frac{M}{r_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot r_n^{m_n}}. \tag{27}$$

□ Мы знаем формулу для коэффициентов c_m:

$$c_m = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\operatorname{Sk}\Delta} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\prod (\zeta_j - a_j)^{m_j+1}}. \tag{28}$$

Заменяя в интеграле $f(\zeta)$ на M, получаем

$$|c_m| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \frac{M}{\prod r_j^{m_j+1}} \cdot \prod 2\pi r_j = \frac{M}{r_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot r_n^{m_n}}. \tag{29}$$

■

Теорема 2.6 (Принцип открытости). *Голоморфная непостоянная функция осуществляет открытое отображение.*

□ Пусть $f\colon D \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Пусть $b \in f(D)$, и $a \in f^{-1}(b)$. Поскольку множество D открыто, найдётся окрестность $U(a) \subset D$. Рассмотрим прямые, проходящие через точку a, а точнее, их пересечения с окрестностью U. По условию, найдётся прямая ℓ, на которой наша функция не постоянна. По одномерному принципу открытости, образ множества $M := \ell \cap U$ открыт. Поэтому вместе с точкой b в образе лежит её окрестность $f(M)$. ■

Замечание. Для отображений $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ это неверно. В самом деле, если $f(z_1, z_2)$ — голоморфная функция, то образ отображения $F(z_1, z_2) := \big(f(z_1, z_2), f(z_1, z_2)\big)$ лежит на прямой $\{z = w\}$, поэтому не может быть открытым множеством.

Скажем пару слов от том, как обстоит дело с ростками у функций многих переменных. Если в одномерном случае были особые точки, то здесь бывают даже особые прямые. Например, прямая $\{z = w\}$ является особой для функции $f(z, w) = \sqrt{z - w}$. Однако само понятие ростка переносится на многомерный случай без изменений.

2.2.7. Плюригармонические функции

Пусть f — голоморфная функция в $\mathbb{C}^n$. Распишем её в виде $f = u + iv$. Имеем $u = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$. Заметим, что $\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_j} = 0$, потому что дифференцирование по переменной z_j убьёт антиголоморфную часть, а дифференцирование по $\overline{z}_j$ — голоморфную. Записывая оператор $\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z}_j}$ в переменных x_j и y_j, получаем оператор Лапласа по переменным x_j и y_j. Обозначим этот оператор через Δ_j.

Определение. Если для функции u выполнено $\Delta_j u = 0$ при всех j, то функция u называется *плюригармонической.*

Очевидно, что всякая плюригармоническая функция u гармонична, то есть $\Delta u = 0$. Запишем уравнения Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}. \tag{30}$$

Из этих уравнений по функции u можно найти сопряжённую плюригармоническую функцию v: рассмотрим форму $\omega = dv$, тогда $d\omega = d^2 v = 0$, поэтому в односвязной области можно (однозначно с точностью до константы) восстановить функцию v по формуле

$$v(z) = \int\limits_a^z \omega. \tag{31}$$

Такое задание корректно по теореме Стокса: если γ — замкнутый контур, на котором лежат точки z и a, то

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_{\operatorname{Int}\gamma} d\omega = \int\limits_{\operatorname{Int}\gamma} 0 = 0, \tag{32}$$

поэтому интегралы по двум половинкам контура γ от z до a и от a до z отличаются только знаком, а это и значит, что интеграл не зависит от пути.

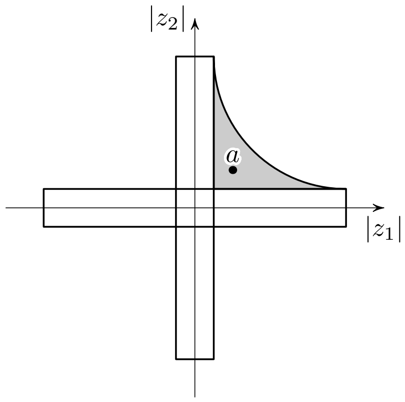
2.3. Устранимые особые множества. Фигуры Хартогса

2.3.1. Об устранимых особых множествах

Довольно полезным следствием логарифмической выпуклости областей голоморфности является следующая лемма.

Лемма 2.7 (об устранимой особенности). *Изолированная особая точка является устранимой особенностью для голоморфной функции нескольких переменных.*

□ Пусть a — изолированная особая точка. В силу её изолированности, найдутся два полидиска Δ_1 и Δ_2, в которых функция голоморфна, и точка a лежит сколь угодно близко к их пересечению. Множество $L :=$ $:= \varphi^{-1}\big(\operatorname{conv}\varphi(\Delta_1 \cup \Delta_2)\big)$ кроме исходных полидисков будет содержать ещё некоторое множество, ограниченное снаружи поверхностью, напоминающей гиперболу. Функция f голоморфна в L, поэтому достаточно придвинуть наши полидиски столь близко к точке a, чтобы точка a была заметена множеством L. ■

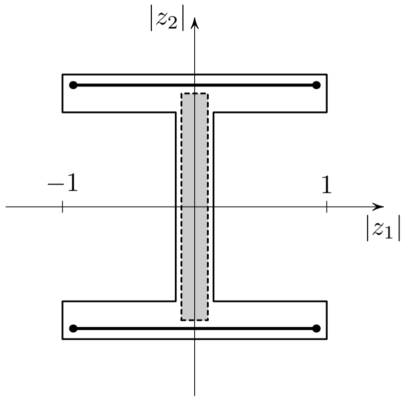


Замечание. С помощью аналогичной процедуры можно уничтожить любой компакт $K \subset \mathbb{C}^n$, правда, придётся потребовать, чтобы функция была голоморфна в $\mathbb{C}^n \setminus K$. Чтобы сделать это, нужно надвинуть на этот компакт такие «длинные» полидиски, чтобы множество L поглотило весь компакт K.

2.3.2. Аналитическое продолжение функции с фигуры Хартогса на полидиск

Мы ограничимся рассмотрением функций двух переменных z_1, z_2. Суть происходящего понятна уже и в этом случае, а рисовать удобнее. Полидиски (в нашем случае — бидиски) удобно рисовать на плоскости $(|z_1|, |z_2|)$ в виде прямоугольников, подразумевая под отрицательными значениями координат их модули (для симметрии). Таким образом, почти все точки имеют 4 симметричных изображения (но на самом деле они соответствуют бесконечному множеству «настоящих» точек, получаемых вращениями относительно осей координат).

Фигурой Хартогса называется множество вида



Поскольку оно напоминает катушку, мы будем называть его среднюю часть перемычкой.

Без ограничения общности рассмотрим фигуру Хартогса H ширины 1 и высоты 1. Пусть $f \in \mathcal{O}(H)$. Заметим, что если точка $(|z_1|, |z_2|)$ принадлежит H, то можно написать интегральную формулу Коши для контура $|z_2| = 1 - \varepsilon$. Рассмотрим функцию

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1-\varepsilon} \frac{f(z_1, \zeta)}{\zeta - z_2}\, d\zeta. \tag{33}$$

Сия формула имеет смысл, поскольку весь контур интегрирования содержится в области голоморфности функции f. Далее, заметим, что когда второй аргумент функции f близок по модулю к 1, первому аргументу разрешается принимать любые по модулю значения, меньшие 1. Отсюда следует, что интеграл (33) определён при всех $|z_2| < 1 - \varepsilon$ и $|z_1| < 1$. Видно, что F будет непрерывной и голоморфной по каждому аргументу. Осталось заметить, что если ограничить $|z_1|$ шириной перемычки, то этот интеграл совпадает с формулой Коши для исходной функции f: в перемычке (а точнее в закрашенном бицилиндре) она голоморфна и потому для неё справедлива формула Коши. Значит, на перемычке имеем $f = F$.

Радость состоит в том, что область определения функции F шире, чем у исходной. Поскольку ε можно взять произвольно малым, получаем, что функция f продолжается до функции, голоморфной в бидиске $\{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$.

2.3.3. Принцип непрерывности и области голоморфности

Определение. Пусть Δ — диск в $\mathbb{C}^r$, $r < n$. Образ диска Δ при голоморфном биективном отображении $\varphi\colon \Delta \to \mathbb{C}^n$ с всюду невырожденным дифференциалом называется *аналитической r-мерной поверхностью.* При $r = 1$ эти поверхности часто называют *аналитическими кривыми.*

Если теперь рассмотреть функции на аналитических кривых (одномерных комплексных многообразиях), то для них очевидным образом справедлива теорема единственности и принцип максимума. Для доказательства достаточно перетащить функцию на диск: если $S = \varphi(\Delta)$ — аналитическая кривая, а $f\colon S \to \mathbb{C}^n$ — голоморфная функция на кривой S, то функция $g(t) = f\big(\varphi(t)\big)$ уже будет обычной голоморфной функцией.

Теорема 2.8. *Пусть $\Delta \subset \mathbb{C}$ — единичный круг, $D \subset \mathbb{C}^n$ — область, а $\varphi\colon \overline{\Delta} \to D$ — аналитическая кривая. Пусть $K \supset \varphi(\partial\Delta)$ — компакт в области D, а $\rho := \operatorname{dist}(K, \partial D)$. Пусть $f \in \mathcal{O}(D)$. Тогда f аналитически продолжается в $\frac{\rho}{2}$-окрестность множества $\varphi(\overline{\Delta})$.*

□ Положим для краткости $C := \varphi(\partial\Delta)$, а $S := \varphi(\overline{\Delta})$. Поскольку $\frac{\rho}{2}$-окрестность всякой точки $z \in C$ содержится в области D, радиус сходимости степенного ряда функции f в этих точках не меньше, чем $\frac{\rho}{2}$. Запишем разложение функции f в степенной ряд с центром в каждой точке поверхности S. Заметим, что коэффициенты этого ряда Тейлора являются голоморфными функциями в зависимости от центра точки разложения:

$$c_m(a) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(a). \tag{34}$$

Функция f ограничена на множестве $K \cup S$ некоторой константой M, потому что K и S — компакты. Поэтому можно написать неравенство Коши:

$$|c_m(a)| \leqslant \frac{M}{R^m(a)}, \tag{35}$$

так как радиус разложения, вообще говоря, зависит от точки. Рассмотрим функции

$$c_m \circ \varphi\colon \Delta \to \mathbb{C}. \tag{36}$$

Для них справедлив обычный принцип максимума, поэтому они могут достигать своего максимума только на границе Δ. Но чем больше коэффициент ряда Тейлора, тем хуже получается оценка на радиус сходимости этого ряда. Таким образом, «самые плохие» оценки на радиус сходимости получатся на границе, то есть в точках множества C. Но в этих точках мы уже гарантировали себе радиус $\frac{\varrho}{2}$. Следовательно, эту оценку снизу на радиус можно распространить на всю поверхность S. ■

Замечание. Вся прелесть этой теоремы состоит в том, что поверхность S может подходить достаточно близко к границе области D, и $\frac{\varrho}{2}$-окрестности её точек могут вылезти за пределы D. Это означает, что функция f аналитически продолжается в большую область.

Определение. Область D называется областью голоморфности, если существует функция $f \in \mathcal{O}(D)$ такая, что она не продолжается аналитически ни через одну точку границы D.

Область голоморфности обладает «выпуклостью» в некотором смысле, но мы не будем уточнять, в каком.

2.4. Биголоморфные отображения

При рассмотрении функций одной переменной у нас были хорошие конформные отображения. В многомерном случае с конформностью придётся расстаться. Некоторым аналогом конформных отображений являются так называемые биголоморфные отображения.

Определение. Пусть D_1, D_2 — области в $\mathbb{C}^n$. Отображение $f\colon D_1 \xrightarrow{\text{на}} D_2$ называется *биголоморфным*, если f и f^{-1} голоморфны.

Такое определение позволяет говорить о биголоморфной эквивалентности областей: $D_1 \sim D_2$, если существует биголоморфное отображение D_1 на D_2.

2.4.1. Теорема о неявном отображении

Теорема 2.9 (о неявном отображении). *Пусть задано уравнение $F(\vec{z}, \vec{w}) = 0$, где $F\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ — голоморфное отображение. Пусть $F(a, b) = 0$ и*

$$\det\left(\frac{\partial F(a,b)}{\partial w}\right) \neq 0. \tag{37}$$

Тогда существует голоморфная функция $w = f(z)$, для которой в некоторой окрестности точки a выполнено тождество

$$F\bigl(z, f(z)\bigr) \equiv 0. \tag{38}$$

□ Заметим, что выполнены условия вещественной теоремы о неявном отображении. Применив её, получаем, что существует $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $w = f(z)$, удовлетворяющая нашему уравнению. Имеем

$$dF = \frac{\partial F}{\partial z}\,dz + \frac{\partial F}{\partial w}\,dw, \tag{39}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}. \tag{40}$$

Продифференцируем уравнение (38), получим:

$$\frac{\partial F}{\partial z}\,dz + \frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}\right) \equiv 0. \tag{41}$$

Приводя подобные слагаемые при dz и $d\overline{z}$, получаем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz + \frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z} \equiv 0. \tag{42}$$

Матрица $\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)$ невырождена, поэтому обязан быть нулевым вектор $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$. Но это и означает голоморфность функции f. ■

2.4.2. Примеры биголоморфных отображений

Через $\operatorname{Aut}(D)$ будем обозначать группу биголоморфных отображений области $D \subset \mathbb{C}^n$ на себя. Если $D_1 \sim D_2$, то $\operatorname{Aut}(D_1) \cong \operatorname{Aut}(D_2)$. Этот изоморфизм задаётся следующим образом. Пусть $D_2 = \varphi(D_1)$, а $f_1 \in \operatorname{Aut}(D_1)$. Сопоставим автоморфизму f_1 автоморфизм $f_2 := \varphi f_1 \varphi^{-1} \in \operatorname{Aut}(D_2)$.

Примерами биголоморфных автоморфизмов пространства $\mathbb{C}^n$ будут линейные преобразования, то есть группа $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Далее мы будем рассматривать пространство $\mathbb{C}^2(z,w)$.

Определение. Преобразования вида

$$\begin{cases} \widetilde{z} = z + f(w), \\ \widetilde{w} = w, \end{cases} \tag{43}$$

где $f(w)$ — целая функция, называются *треугольными* преобразованиями.

Очевидно, обратным к треугольному преобразованию (43) является преобразование

$$\begin{cases} z = \widetilde{z} - f(\widetilde{w}), \\ w = \widetilde{w}, \end{cases} \tag{44}$$

которое также является треугольным. Следовательно, они образуют группу.

Замечание. В отличие от одномерного случая, группа биголоморфных отображений $\mathbb{C}^n$ на себя бесконечномерна, так как подгруппа треугольных преобразований бесконечномерна (их не меньше, чем целых функций, а их, в свою очередь, не меньше, чем многочленов произвольной степени).

Как мы знаем, множество $\mathbb{C}$ нельзя отобразить конформно и однолистно на единичный диск. В многомерном случае такое уже возможно (см. пример в [1]).

2.4.3. Дробно-линейные отображения в $\mathbb{CP}^2$

В пространстве $\mathbb{C}^2$ можно рассматривать дробно-линейные преобразования вида

$$\widetilde{z} = \frac{Az+Bw+C}{pz+qw+r}, \quad \widetilde{w} = \frac{az+bw+c}{pz+qw+r}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} \neq 0. \tag{45}$$

Но на самом деле удобнее вложить аффинное пространство $\mathbb{C}^2$ в проективное пространство $\mathbb{CP}^2$, поскольку в однородных координатах всё выглядит более симметрично.

Напомним, что

$$\mathbb{CP}^2 = \{(\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2)\}, \quad \zeta_i \in \mathbb{C}, \quad |\zeta_0| + |\zeta_1| + |\zeta_2| \neq 0. \tag{46}$$

При этом тройки $(\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2)$ рассматриваются с точностью до пропорциональности, то есть

$$(\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2) \sim (\lambda\zeta_0 : \lambda\zeta_1 : \lambda\zeta_2), \quad \lambda \neq 0. \tag{47}$$

Смысл условия $|\zeta_0| + |\zeta_1| + |\zeta_2| \neq 0$ вполне ясен: хотя бы одна из однородных координат не равна нулю.

Построим какое-нибудь вложение $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$: положим $z = \frac{\zeta_1}{\zeta_0}$ и $w = \frac{\zeta_2}{\zeta_0}$. Это позволяет отождествить подмножество $\{(1 : \zeta_1 : \zeta_2)\} \subset \mathbb{CP}^2$ с множеством $\mathbb{C}^2$.

В алгебраических терминах имеем $\mathbb{CP}^2 = {}^{(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})}\big/_{\mathbb{C}^*}$, и ещё можно считать, что

$$\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}. \tag{48}$$

Запишем наше дробно-линейное преобразование в однородных координатах:

$$\frac{\widetilde{\zeta}_1}{\widetilde{\zeta}_0} = \frac{A\frac{\zeta_1}{\zeta_0} + B\frac{\zeta_2}{\zeta_0} + C}{p\frac{\zeta_1}{\zeta_0} + q\frac{\zeta_2}{\zeta_0} + r}, \quad \frac{\widetilde{\zeta}_2}{\widetilde{\zeta}_0} = \frac{a\frac{\zeta_1}{\zeta_0} + b\frac{\zeta_2}{\zeta_0} + c}{p\frac{\zeta_1}{\zeta_0} + q\frac{\zeta_2}{\zeta_0} + r}. \tag{49}$$

Приводя дроби к общему знаменателю и записывая эти выражения в матричной форме, получаем

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\zeta}_0 \\ \widetilde{\zeta}_1 \\ \widetilde{\zeta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & p & q \\ C & A & B \\ c & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

В итоге получаем группу линейных преобразований проективного пространства $\mathbf{PGL}_3(\mathbb{C})$ комплексной размерности 8. Всякое преобразование из $\mathbf{PGL}_n$ задаётся образом $(n+1)$-й точки.[1]

Построим дробно-линейное отображение $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C}$ на $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C}$. Именно, возьмём отображение

$$\text{прямое: } \begin{cases} \widetilde{z} = \frac{2z}{w+i}, \\ \widetilde{w} = \frac{w-i}{w+i}; \end{cases} \qquad \text{обратное: } \begin{cases} z = -i\frac{\widetilde{z}}{\widetilde{w}-1}, \\ w = -i\frac{\widetilde{w}+1}{\widetilde{w}-1}. \end{cases} \tag{51}$$

[1] Здесь индекс n у группы **PGL** означает размерность объемлющего комплексного пространства. Соответствующее проективное пространство имеет на единицу меньшую размерность. — *Прим. наб.*

Прямым подсчётом проверяется, что

$$\begin{cases} |\widetilde{w}| < 1 & \Leftrightarrow \ \operatorname{Im} w > 0, \\ |\widetilde{z}|^2 + |\widetilde{w}|^2 < 1 & \Leftrightarrow \ \operatorname{Im} w > |z|^2. \end{cases} \tag{52}$$

Таким образом, получаем отображение $\mathbb{C}^2 \setminus \{w + i = 0\} \leftrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{\widetilde{w} - 1 = 0\}$.

Тут ещё были какие-то формулы. Но к чему они, осталось загадкой.

2.4.4. Обобщённый принцип максимума и лемма Шварца

Скажем пару слов о нормах в $\mathbb{C}^n$. Вообще, чтобы задать норму в линейном пространстве, нужно задать некоторое множество и объявить, что это единичный шар в смысле этой нормы. Разумеется, годятся не всякие множества, но мы будем работать только с шарами и полидисками, которые для этой цели вполне подходят.

Единичный шар B^n является шаром в норме $\|z\|_1 = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$, а полидиск Δ^n — шаром в норме $\|z\| = \max\limits_j |z_j|$.

Лемма 2.10. *Во всякой норме шар является выпуклым множеством.*

☐ Пусть $B = \{z \colon \|z\| \leqslant 1\}$ — единичный шар. Пусть $a, b \in B$. Рассмотрим произвольную точку ζ на отрезке $[a, b]$. Она имеет вид $\zeta = \lambda a + (1 - \lambda) b$, где $\lambda \in [0, 1]$. Применим неравенство треугольника:

$$\|\zeta\| = \|\lambda a + (1-\lambda) b\| \leqslant \lambda \cdot \underbrace{\|a\|}_{\leqslant 1} + (1-\lambda) \cdot \underbrace{\|b\|}_{\leqslant 1} \leqslant \lambda + (1 - \lambda) = 1. \tag{53}$$

Таким образом, $\|\zeta\| \leqslant 1$ и потому $\zeta \in B$. ■

Лемма 2.11 (Обобщённый принцип максимума). *Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Пусть $f \colon D \to \mathbb{C}^m$, и на $\mathbb{C}^m$ введена норма $\|\cdot\|$. Пусть в некоторой точке $a \in D$ достигается максимум нормы $\|f(z)\|$, то есть $\|f(a)\| \geqslant \|f(z)\|$ при всех $z \in D$. Тогда $\|f(z)\| \equiv \mathrm{const}$.*

☐ Если $f(a) = 0$, то доказывать нечего, так как $f \equiv 0$. В противном случае рассмотрим шар B в $\mathbb{C}^m$ радиуса $\|f(a)\|$. Тогда $f(D) \subset B$, а точка $f(a)$ лежит на границе этого шара. Так как шар B является выпуклым множеством, существует[2] опорная гиперплоскость π (то есть такая плоскость, что одно из полупространств, на которые она разбивает всё пространство, не содержит точек шара).

Через $w = u + iv$, где $u, v \in \mathbb{R}^m$, будем обозначать точки в пространстве $\mathbb{C}^m$. Гиперплоскость π задаётся в $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^m \oplus i\mathbb{R}^m$ некоторым вещественным линейным функционалом $\ell(u, v) = \alpha$. Его можно единственным образом продолжить до комплексного линейного функционала по правилу $\ell(i\vec{x}) = i\ell(\vec{x})$, $x \in \mathbb{R}^m \oplus i\mathbb{R}^m$. Полученное продолжение обозначим через L. При этом имеем $\ell = \operatorname{Re} L$. Рассмотрим голоморфную функцию $g(z) = \exp L\bigl(f(z)\bigr)$. Имеем

$$|g(z)| = \bigl|\exp L\bigl(f(z)\bigr)\bigr| = \exp \operatorname{Re} L\bigl(f(z)\bigr) = \exp \ell(u, v). \tag{54}$$

Для определённости считаем, что то полупространство, куда не попало ни одной точки из множества $f(D)$, задаётся неравенством $\ell(u, v) > \alpha$. Тогда для всех $z \in D$ имеем

$$|g(z)| = \exp \ell(u, v) \leqslant \exp \alpha, \tag{55}$$

причём в точке a достигается равенство. Применив к функции g обычный принцип максимума, получаем, что g обязана быть константой.

Отсюда следует, что на образе всего множества D функционал ℓ постоянен. Значит, $f(D) \subset \pi$. Но так как π — опорная гиперплоскость, она не имеет общих точек с внутренностью шара B. Поэтому множество $f(D)$ может лежать только на границе шара, но это и означает, что $\|f(z)\| = \|f(a)\| = \mathrm{const}$. ■

Замечание. В случае, если норма такова, что шар в ней является *строго* выпуклым множеством, можно утверждать большее, а именно то, что $f \equiv \mathrm{const}$, поскольку в этом случае гиперплоскость пересекается с шаром ровно в одной точке.

Лемма 2.12 (Шварца). *Пусть $X_1 := \bigl(\mathbb{C}^{n_1}, \|\cdot\|_1\bigr)$ и $X_2 := \bigl(\mathbb{C}^{n_2}, \|\cdot\|_2\bigr)$ — нормированные пространства. Пусть B_1 — единичный шар в X_1, а B_2 — единичный шар в пространстве X_2. Пусть $f \colon B_1 \to B_2$ — голоморфное отображение, для которого $f(0) = 0$. Тогда $\|f(z)\|_2 \leqslant \|z\|_1$.*

☐ Пусть $z \in B_1$. Рассмотрим единичный вектор $\vec{a} := \frac{z}{\|z\|_1}$ и прямую $\ell := \{t\vec{a} \mid t \in \mathbb{C}\}$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \frac{f(ta)}{t}$. Она голоморфна, поскольку $f(0) = 0$ и особенность устраняется. Пусть $|t| \leqslant r < 1$, тогда по

[2] Строгое доказательство этого факта нетривиально. Его можно прочесть, например, в [7, гл. 7, § 2, теорема 1] — *Прим. наб.*

принципу максимума $\|\varphi(t)\|_2 \leqslant \frac{1}{r}$. Поскольку r можно брать сколь угодно близким к 1, в пределе получаем неравенство

$$\|\varphi(t)\| \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \left\|\frac{f(ta)}{t}\right\|_2 \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \|f(ta)\|_2 \leqslant |t|. \tag{56}$$

Осталось положить $t = \|z\|_1$. ■

2.4.5. Биголоморфная неэквивалентность шара и полидиска

Скажем пару слов о группах автоморфизмов шара и полидиска. Очевидно, что $\mathrm{Aut}(\Delta^n) \supset \mathbf{S}_n \times (\mathrm{Aut}\,\Delta)^n$, так как можно как угодно переставлять координаты и осуществлять конформные автоморфизмы дисков по каждой координате преобразованиями вида

$$z_j \mapsto e^{i\varphi_j}\frac{z_j - a_j}{1 - \overline{a}_j z_j}. \tag{57}$$

Отсюда следует, что $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Aut}(\Delta^n) \geqslant n + 2n$ (умножение на дискретную группу $\mathbf{S}_n$ на размерность не влияет). На самом деле можно показать, что группа $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ исчерпывается такими преобразованиями, и таким образом $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Aut}(\Delta^n) = 3n$.

Что же касается шара, то можно показать, что для него $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Aut}(B^n) = n^2 + 2n$. Легко видеть, что в группе автоморфизмов шара содержится унитарная группа $\mathbf{U}_n$, состоящая из таких комплексных матриц A, что $\overline{A} \cdot A^t = E$. Её размерность равна n^2 (у матрицы $2n^2$ вещественных переменных, и на них накладывается n^2 независимых соотношений). Тем самым мы показали, что $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Aut}(B^n) \geqslant n^2$.

Если применить соображения о размерностях, то доказательство биголоморфной неэквивалентности очевидно: при $n \geqslant 2$ имеем $3n < n^2 + 2n$ и потому соответствующие группы автоморфизмов не могут быть изоморфными. Но мы пойдём другим путём, который не использует «тяжёлой артиллерии».

Теорема 2.13. *При $n \geqslant 2$ шар и полидиск биголоморфно неэквивалентны друг другу.*

□ Будем рассуждать от противного: пусть существует биголоморфное отображение $\varphi\colon B^n \to \Delta^n$. Из сказанного выше следует, что полидиск однороден, то есть группа автоморфизмов действует на нём транзитивно (любую точку можно перевести в любую другую перестановкой координат и координатным автоморфизмом).

Если бы полидиск и шар были биголоморфно эквивалентными, то шар тоже был бы однородным. В самом деле, пусть $x, y \in B$. Рассмотрим точки $z = \varphi(x)$ и $w = \varphi(y)$. В силу однородности полидиска, существует $f \in \mathrm{Aut}(\Delta^n)$, для которого $f(z) = w$. Тогда автоморфизм шара $\varphi^{-1} f \varphi$ переводит x в y.

Поэтому можно считать, что φ сохраняет 0, то есть $\varphi(0) = 0$. Действительно, пусть $\varphi(0) = z_0$. Рассмотрим автоморфизм полидиска f, переводящий z_0 в точку 0. Тогда $\Phi := f \circ \varphi$ уже обладает требуемым свойством. А раз $\Phi(0) = 0$, то применима лемма Шварца: пусть $w = \Phi(z)$, тогда $\|w\|_\Delta \leqslant \|z\|_B$. Но так как Φ — биголоморфизм, лемма Шварца применима и к Φ^{-1}. Значит, верно и обратное неравенство $\|z\|_B \leqslant \|w\|_\Delta$. Следовательно,

$$\|\Phi(z)\|_\Delta = \|z\|_B\,. \tag{58}$$

Но отсюда, в частности, следует, что всякая сфера радиуса $r < 1$ переходит в границу полидиска (которая при $n \geqslant 2$ не диффеоморфна сфере в силу «угловатости»[3]). Получаем противоречие. ■

На самом деле легко видеть, что граница двумерного полидиска представляет собой склейку двух полноторий. Склейка производится по их общей части, то есть по тору $\{|z_1| = 1\} \times \{|z_2| = 1\}$.

2.4.6. Теорема Анри Картана

Определение. *Область ограниченного вида* — область, биголоморфно эквивалентная ограниченной.

Теорема 2.14 (А. Картана). *Пусть D — область ограниченного вида, а $f \in \mathrm{Aut}(D)$. Если $f(a) = a$ и $f'(a) = \mathrm{id}$, то $f = \mathrm{id}$.*

□ Как обычно, доказываем от противного. Без ограничения общности $a = 0$. Напишем разложение Тейлора:

$$f(z) = z + P_m(z) + O(z^{m+1}), \tag{59}$$

где $P_m(z)$ — ненулевой многочлен степени m, у которого равны нулю коэффициент при z и свободный член. Рассмотрим итерации отображения f (далее под записью f^ν мы понимаем ν-ю степень композиции). Имеем

$$f^2(z) = f\bigl(f(z)\bigr) = f\bigl(z + P_m(z)\bigr) = \bigl(z + P_m(z) + \dots\bigr) + P_m\bigl(z + P_m(z) + \dots\bigr) + \dots = z + 2P_m(z) + \dots \tag{60}$$

Аналогично получаем, что

$$f^\nu(z) = z + \nu P_m(z) + \dots \tag{61}$$

[3] Почему полидиск угловатый, и почему они правда не диффеоморфны, подумайте сами.

Впишем в область D полидиск Δ_1 с центром в нуле радиуса r и опишем вокруг D ещё один полидиск Δ_2 радиуса R тоже с центром в нуле. Тогда $|f(z)| \leqslant R$ при всех $z \in D$, поскольку f отображает D в себя, а следовательно, и внутрь большого полидиска. К меньшему полидиску применимо неравенство Коши:

$$|c_m| \leqslant \frac{R}{r^m}. \tag{62}$$

Соответственно, для итераций должна быть справедливой та же оценка, то есть

$$|{}_\nu c_m| \leqslant \frac{R}{r^m}. \tag{63}$$

Но при достаточно больших ν неравенство, очевидно, нарушится. Значит, на самом деле $P_m = 0$. ■

Следствие 2.1. *Если имеется биголоморфизм $\varphi_1 \colon D_1 \to D_2$, то он задаётся образом одной точки и значением производной в этой точке.*

□ В самом деле, пусть имеется два отображения φ_1 и φ_2 с такими свойствами. Тогда отображение $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ удовлетворяет условиям теоремы Картана и потому тождественно, то есть $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

Следствие 2.2. *Группа автоморфизмов произвольной области в $\mathbb{C}^n$ имеет размерность не более $2n^2 + 2n$.*

□ Дифференциал биголоморфизма — это невырожденная комплексная матрица размера $n \times n$, а пространство таких матриц имеет размерность $2n^2$ (это в точности полная линейная группа $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$). А чтобы задать образ одной точки, нам потребуется ещё n комплексных координат, то есть $2n$ вещественных. По предыдущему следствию, эти параметры полностью задают биголоморфизм. ■

3. Представление мероморфных и целых функций

Вернёмся к функциям одной переменной.

3.1. Представление мероморфных функций

3.1.1. Теорема Миттаг-Леффлера

Как мы знаем, для рациональной функции справедливо представление вида

$$R(z) = P_0(z) + \sum P_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right), \tag{1}$$

где P_j — многочлены. В этом разделе мы докажем, что аналогичное представление справедливо и для мероморфных функций.

Напомним, что мероморфная в $\mathbb{C}$ функция — это такая функция, у которой все особые точки не хуже, чем полюса, и при этом полюсам разрешено накапливаться только вокруг ∞.

Для простоты будем всегда рассматривать функции, мероморфные во всей плоскости.

Определение. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность мероморфных функций. Говорят, что ряд $\sum f_n$ сходится, если для каждого компакта $K \subset \mathbb{C}$ найдётся N такое, что при $n > N$ имеем $f_n \in \mathcal{O}(K)$ (то есть «хвост» не имеет полюсов на компакте K), и «хвост» ряда $\sum\limits_{n \geqslant N} f_n$ сходится на K равномерно.

Из определения и теоремы Вейерштрасса следует, что «хвост» является голоморфной функцией. Поэтому предел автоматически является мероморфной функцией.

Лемма 3.1. *Пусть имеется последовательность дисков $\{\Delta_n(r_n)\}$, радиусы которых возрастают к $+\infty$, и $\{F_n\}$ — последовательность функций, мероморфных в $\mathbb{C}$ и голоморфных на $\overline{\Delta}_n$. Тогда существует последовательность так называемых поправочных многочленов $\{P_n\}$, что ряд*

$$\sum \bigl(F_n(z) - P_n(z)\bigr) \tag{2}$$

сходится как ряд из мероморфных функций.

□ Зафиксируем произвольную последовательность $\varepsilon_n > 0$, для которой ряд $\sum \varepsilon_n$ сходится. В силу голоморфности F_n на $\overline{\Delta}_n$ имеет место разложение F_n в ряд

$$F_n(z) = \sum_m c_{mn} z^m, \tag{3}$$

равномерно сходящийся на $\overline{\Delta}_n$. В силу этой сходимости можно приблизить функцию F_n отрезком её степенного ряда с точностью ε_n, то есть найти m_n такое, что

$$|F_n - P_n| < \varepsilon_n, \quad P_n = \sum_{m=0}^{m_n} c_{mn} z^m. \tag{4}$$

Так как ряд из ε_n сходится, то ряд (2) будет равномерно сходиться на каждом из $\overline{\Delta}_n$, что и требуется. ■

Пусть a_n — полюса некоторой мероморфной функции f. Через g_n будем обозначать главную часть её лорановского разложения в полюсе a_n, то есть

$$g_n(z) = Q_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right), \quad Q_n \in \mathbb{C}[z], \quad \deg Q_n = p_n. \tag{5}$$

Теорема 3.2 (Миттаг-Леффлера). *Пусть $\{a_n\}$ — последовательность точек, не имеющая точек накопления в $\mathbb{C}$, и g_n — набор главных частей g_n вида* (5). *Тогда существует мероморфная функция, имеющая полюса ровно в этих точках, причём при всех n главная часть лорановского разложения в полюсе a_n совпадает с g_n.*

□ Упорядочим полюсы по возрастанию их модулей (это всегда можно сделать, потому что во всяком круге их лишь конечное число). Будем сначала считать, что $a_0 \neq 0$. Положим $F_n(z) = g_n(z)$. Применим лемму и рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n(z) - P_n(z)\right), \tag{6}$$

где P_n — поправочные многочлены. Она, очевидно, и будет искомой.

Избавиться от ограничения $a_0 \neq 0$ можно очень просто: если $F(z)$ — функция, имеющая требуемые главные части в ненулевых полюсах, то функция

$$\widetilde{F}(z) = g_0(z) + F(z) \tag{7}$$

будет иметь полюса во всех точках $a_0, a_1, \ldots$ ■

Следствие 3.1. *Всякая мероморфная функция с полюсами в точках $\{a_n\}$ имеет представление вида*

$$f(z) = G(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_n(z) - P_n(z)\right), \quad G \in \mathcal{O}(\mathbb{C}). \tag{8}$$

3.1.2. Метод Коши

Теорема 3.3. *Пусть γ_n — последовательность контуров таких, что $r_n := \rho(\gamma_n, 0) \to \infty$. Пусть $|\gamma_n| = L_n$ и $L_n \leqslant C r_n$, где C — константа, ни от чего не зависящая. (Последнее условие означает, что контуры не слишком «кривые»). Пусть мероморфная функция f такова, что*

$$|f(z)| \leqslant M|z|^m \text{ при } z \in \gamma_n \text{ для всех } n. \tag{9}$$

Тогда в качестве поправочных многочленов можно брать многочлены степени не выше m.

□ Обозначим $D_n := \operatorname{Int}\gamma_n$. Возьмём контур γ_n и зафиксируем точку z внутри него. Запишем теорему Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z) + \underbrace{\sum_{a_k \in D_n} \operatorname*{res}_{a_k} f}_{S}. \tag{10}$$

Последнее равенство верно, поскольку полюсами подинтегральной функции как раз являются все особые точки внутри контура γ_n и точка z, вычет в которой по интегральной формуле Коши равен $f(z)$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_n(z) = \sum_{a_k \in D_n} g_k(z). \tag{11}$$

Заметим, что в формуле (10) можно f заменить на φ_n, потому что вычитание голоморфного слагаемого ничего не поменяет.

Функция φ_n состоит из правильных дробей. При делении на $\zeta - z$ они станут «ещё правильнее», и степень знаменателя будет по крайней мере на 2 больше, чем степень числителя. Отсюда следует, что интеграл

$$I := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{\varphi_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0. \tag{12}$$

В самом деле, если увеличивать номер контура, то интеграл не меняется, поскольку вне контура у φ_n полюсов нет. С другой стороны, при увеличении радиуса контура интеграл стремится к нулю, потому что длина контура растёт так же, как r_k, а функция убывает как r_k^2.

Таким образом, имеем

$$0 = I = \varphi_n(z) + S, \tag{13}$$

поэтому $S = -\varphi_n(z)$. Подставим полученное выражение для S в формулу (10):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) - \sum_{a_k \in D_n} g_k(z). \tag{14}$$

Разложим ядро Коши:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\zeta^{k+1}}. \tag{15}$$

Теперь дифференцируем полученную формулу k раз ($k = 0, \ldots, m$) и подставляем $z = 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} - \sum_{a_j \in D_n} \frac{g_j^{(k)}(0)}{k!}. \tag{16}$$

Вычтем продифференцированные равенства из исходного, домножая их на z^k. Получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{\zeta^{k+1}}\right) f(\zeta)\, d\zeta = f(z) - \underbrace{\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k}_{G(z)} - \sum_{a_j\in D_n}\left(g_j(z) - \underbrace{\sum_{k=0}^{m}\frac{g_j^{(k)}(0)}{k!}z^k}_{P_j(z)}\right). \tag{17}$$

Выражение в скобках под интегралом является хвостом геометрической прогрессии, поэтому левая часть равенства может быть записана в виде

$$J := \frac{z^{m+1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^m\cdot\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta. \tag{18}$$

Поэтому

$$|J| \leqslant \frac{C\cdot M|z|^{m+1}}{2\pi(r_n - |z|)} \to 0, \quad n\to\infty. \tag{19}$$

Значит $J = 0$. Заметим, что если теперь перенести $f(z)$ в левую часть, то справа останется целая функция G и сумма подправленных дробей. При этом поправочные многочлены имеют степень не выше n. ■

В качестве полезного в приложениях следствия этой теоремы получим формулу для разложения мероморфной функции, у которой все полюса простые и точка $z = 0$ не является полюсом.

Пусть $|f(z)| \leqslant M$ на системе контуров γ_n (чтобы так получилось, нужно аккуратно провести контуры подальше от полюсов). Тогда можно взять $m = 0$. Условие простоты полюсов означает, что функции g_k в разложении f имеют вид

$$g_k(z) = \frac{b_k}{z - a_k}. \tag{20}$$

Фактически, здесь коэффициенты b_k — это вычеты функции f в её полюсах. По теореме получаем разложение для f следующего вида:

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k}\right). \tag{21}$$

Если функция f таки имеет полюс в нуле, его можно сначала убить, вычтя функцию $g_0(z) := \frac{\operatorname{res}_0 f}{z}$. Тогда для функции $f - g_0$ уже работает написанная выше формула.

Здесь и далее под символом $\sum'$ будем понимать **суммирование по всем целым индексам, кроме нуля**.

Пример 1.1. Рассмотрим функцию $f(z) = \operatorname{ctg} z$. Регуляризуем её в нуле и запишем для неё разложение:

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_k{}'\left(\frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{\pi k}\right). \tag{22}$$

Если сгруппировать положительные и отрицательные слагаемые, то получится следующее:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (\pi k)^2}. \tag{23}$$

С помощью почленного дифференцирования равенства (22) получается разложение для функции $\frac{1}{\sin^2 z}$:

$$\frac{1}{\sin^2 z} = -(\operatorname{ctg} z)' = \sum_{\mathbb{Z}} \frac{1}{(z - \pi k)^2}. \tag{24}$$

3.2. Представление целых функций

Если у нас есть многочлен P, то ничего не стоит получить его разложение по его нулям:

$$P(z) = Az^m \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right). \tag{25}$$

Поскольку у многочленов много общего с целыми функциями, возникает естественное желание получить аналогичное разложение для целых функций. Правда, при этом получаемое произведение рискует стать бесконечным.

3.2.1. О бесконечных произведениях

Напомним, что бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k) \tag{26}$$

называется сходящимся, если $1+c_k \neq 0$ при всех k и существует конечный ненулевой предел последовательности

$$\Pi_n := \prod_{k=1}^{n} (1 + c_k). \tag{27}$$

Очевидно, что если произведение сходится, то

$$1 + c_n = \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} \to 1 \quad \Rightarrow \quad c_n \to 0. \tag{28}$$

Отсюда следует, что при всех достаточно больших n все множители лежат в достаточно малой окрестности 1, а там у функции $\operatorname{Ln}(1 + z)$ выделяется однозначная ветвь и можно рассмотреть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + c_n). \tag{29}$$

Легко видеть, что сходимость произведения равносильна сходимости этого ряда.

3.2.2. Теорема Вейерштрасса о заказанных нулях

Для начала заметим, что если f — целая функция без нулей, то функция $h(z) = \ln f(z)$ неограниченно продолжается в $\mathbb{C}$ и по теореме о монодромии тоже является целой функцией. Тогда получаем $f(z) = \exp h(z)$.

Пусть у целой функции F конечное число нулей $a_1, \dots, a_n$ с кратностями $p_1, \dots, p_n$. Тогда функция

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z - a_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_n)^{p_n}} \tag{30}$$

уже не имеет нулей и тоже является целой функцией. По предыдущему рассуждению получаем разложение

$$F(z) = (z - a_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_n)^{p_n} \exp h(z). \tag{31}$$

В общем случае необходимо побороть кратные нули. Пусть целая функция F имеет нули в точках a_k с кратностями p_k. Будем считать, что $F(0) \neq 0$. Перейдём к логарифмической производной: рассмотрим функцию

$$L(z) := \frac{F'(z)}{F(z)}. \tag{32}$$

У неё все полюса простые, и вычеты функции L — это в точности кратности нулей функции F.

Значит, она имеет вид

$$L(z) = H(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + P_{a_n}(z) \right) =: H(z) + K(z), \text{ где } P_{a_n}(z) - \text{поправочные многочлены.} \tag{33}$$

Разложим дробь $\frac{1}{z-a}$ в геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = -\frac{1}{a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a} \right)^k \tag{34}$$

Теперь будем знать вид поправочных многочленов для дроби:

$$L(z) = H(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{m_n - 1}}{a_n^{m_n}} \right) =: H(z) + K(z). \tag{35}$$

Здесь мы написали при каждом слагаемом коэффициент 1, потому что можно повторить каждое слагаемое столько раз, какова кратность нуля a_k (то есть в этой сумме допускаются повторения a_k).

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{K}(z) = \int_0^z K(\zeta)\, d\zeta. \tag{36}$$

Она уже может быть неоднозначной. Выясним, насколько отличаются продолжения по разным путям. Так как первообразная от $\frac{1}{z}$ — это $\operatorname{Ln} z$, мы будем получать приращения, кратные $2\pi i$. Интегрируя, получаем функцию

$$\widetilde{K}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\big(\ln(z - a_n) - \ln(0 - a_n) \big) + \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^{m_n}}{m_n a_n^{m_n}} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^{m_n}}{m_n a_n^{m_n}} \right). \tag{37}$$

Теперь рассмотрим функцию $f(z) := \exp \widetilde{K}(z)$. Экспонента заглушит неоднозначность в силу своей $2\pi i$-периодичности. Тогда в окрестности каждой точки a_k получаем разложение вида

$$f(z) = (z - a_k)^{p_k} \exp \widehat{K}(z), \tag{38}$$

где $\widehat{K}$ представляет собой слагаемые по всем полюсам, кроме a_k. Здесь множитель $z - a_k$ имеет кратность p_k, поскольку слагаемые с полюсом a_k встречаются ровно p_k раз в показателе exp.

Тем самым мы построили общую формулу для целой функции, имеющей заданные нули a_k требуемой кратности p_k. При этом предполагалось, что $f(0) \neq 0$, но это препятствие легко обойти, добавив множитель z^{m_0}. Итак, произвольная целая функция имеет вид

$$f(z) = z^{m_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^{m_n}}{m_n a_n^{m_n}} \right) \right] \exp h(z), \tag{39}$$

где h — некоторая целая функция. Таким образом, доказана теорема:

Теорема 3.4 (Вейерштрасса). *Для любого набора точек a_k (удовлетворяющего теореме Миттаг-Леффлера) существует целая функция с нулями в этих точках наперёд заданной кратности.*

Следствие 3.2. *Всякая мероморфная функция F есть отношение двух целых функций.*

$\square$ Домножим функцию F на такую целую функцию Q, чтобы она убила все полюса F (она существует по только что доказанной теореме). Тогда $P := F \cdot Q$ будет некоторой целой функцией. Значит, $F = \frac{P}{Q}$. $\blacksquare$

Пример 2.1. Рассмотрим функцию $f(z) = \sin \pi z$. Её логарифмическая производная равна

$$(\ln \sin \pi z)' = \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z} = \pi \operatorname{ctg} \pi z. \tag{40}$$

Имеем

$$\operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{\pi z} + \sum{}' \left(\frac{1}{\pi z - \pi n} + \frac{1}{\pi n} \right) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{z} + \sum{}' \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) \right]. \tag{41}$$

Применяя формулу, получаем разложение

$$\sin \pi z = \pi z {\prod_n}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\frac{z}{n}\right). \tag{42}$$

Группируя множители с симметричными индексами, получаем более удобную формулу:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{43}$$

4. Эллиптические функции

4.1. Двоякопериодические функции и их свойства

4.1.1. Периодические функции в $\mathbb{C}$

Будем рассматривать функции, обладающие свойством периодичности, то есть такие, что некотором ненулевом значении $T \in \mathbb{C}$ имеем $f(z+T) = f(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$.

Несложно проверить, что совокупность всех периодов функции — это аддитивная подгруппа в $\mathbb{C}$: сумма периодов — период, и если T — период, то $(-T)$ тоже является периодом.

Далее мы будем рассматривать **только мероморфные функции**.

Напомним, что подгруппа $G \subset \mathbb{R}^n$ называется дискретной, если существует такое число $R > 0$, что для любого $g \in G$ окрестность $U_R(g)$ не содержит других элементов группы, отличных от g.

Лемма 4.1. *Группа периодов непостоянной мероморфной функции f дискретна.*

□ Допустим противное, тогда множество периодов имеет в конечной части плоскости предельную точку. Следовательно, функция принимает одно и то же значение на некоторой сходящейся к этой предельной точке последовательности. По теореме единственности она обязана быть постоянной. ■

Следствие 4.1. *Группа периодов непостоянной мероморфной функции изоморфна либо $\mathbb{Z}^2$, либо $\mathbb{Z}$.*

□ Из алгебры[4] известно, что всякая дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^n$ изоморфна решётке $\mathbb{Z}^k$, где $k \leqslant n$. Случай $k = 0$ невозможен, потому что в этом случае функция не является периодической. Кроме того, имеем $k \leqslant 2$. Значит, функция либо имеет два линейно-независимых периода, либо один период. ■

Далее будем рассматривать функции с двумя независимыми периодами ω_1 и ω_2, а через G будем обозначать группу периодов $\omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. Будем говорить, что $z_1 \equiv z_2 \pmod{G}$, если точка z_2 получается из z_1 сдвигом на целое кратное какого-нибудь периода (или их суммы). Иначе говоря, точки z_1 и z_2 — это один и тот же элемент факторгруппы $\mathbb{C}/G$.

Утверждение 4.2. *Множество мероморфных функций с заданно группой периодов образует поле, выдерживающее дифференцирование.*

□ Очевидно. ■

Определение. Двоякопериодические мероморфные функции называются *эллиптическими.*

Определение. Множество $\{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid t_i \in [0,1)\}$ называется *параллелограммом периодов.* Мы будем обозначать его буквой Π.

4.1.2. Свойства эллиптических функций

Теорема 4.3. *Любая целая эллиптическая функция постоянна.*

□ Ясно, что целая функция ограничена на своём параллелограмме периодов, поэтому она ограничена во всей плоскости. По теореме она обязана быть постоянной. ■

Следствие 4.2. *Непостоянная эллиптическая функция имеет в параллелограмме периодов хотя бы один полюс.*

Определение. *Порядком* функции называется количество полюсов на параллелограмме периодов с учётом кратности.

Теорема 4.4. *Если на $\partial\Pi$ эллиптическая функция не имеет полюсов, то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Pi} f(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{1}$$

[4] По этому поводу см., например, [7, гл. 9, § 1, теорема 4]. — *Прим. наб.*

□ В силу периодичности функции, интегралы по противоположным сторонам параллелограмма будут лишь различаться знаком (поскольку направления интегрирования на них противоположны). Значит, в итоге получится нуль. ■

Следствие 4.3. *Если $\partial\Pi$ не содержит полюсов, то сумма всех вычетов внутри Π равна нулю.*

□ Вытекает из предыдущей теоремы и теоремы Коши о вычетах. ■

Следствие 4.4. *Эллиптических функций порядка 1 не существует.*

□ Если полюс в параллелограмме периодов всего один, то можно так подвигать этот параллелограмм, что этот полюс попадёт в $\operatorname{Int}\Pi$. По предыдущему следствию, вычет в этом полюсе обязан быть нулевым. Но вычет — это лорановский коэффициент c_{-1}. Если он равен нулю, то это значит, что в этой точке либо вообще нет полюса, либо его кратность не меньше двух. ■

Замечание. В наших рассуждениях часто приходится оговаривать, что на границе Π полюсов нет. Ясно, что этого всегда можно добиться, подвигав параллелограмм периодов. Поэтому больше не будем заострять на этом внимание.

Теорема 4.5. *Всякое уравнение $f(z) = c$ имеет на параллелограмме периодов ровно столько же решений, каков порядок функции f.*

□ По принципу аргумента имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi}\frac{\big(f(\zeta)-c\big)'}{f(\zeta)-c}\,d\zeta = N - P, \tag{2}$$

где N и P — количества нулей и полюсов функции $f(z)-c$ соответственно. Заметим, что под интегралом стоит эллиптическая функция того же периода, что и функция f. Поэтому этот интеграл равен нулю. Следовательно, $N = P$. Но полюса функции $f(z)-c$ и функции $f(z)$, очевидно, совпадают, а количество полюсов функции f в параллелограмме Π и есть P. Это и требовалось доказать.

Это рассуждение проходит для всех конечных значений c, а если $c = \infty$, то утверждение теоремы вытекает сразу из определения порядка функции f. ■

Определение. Решения уравнения $f(z) = c$ иногда называют c-точками.

Замечание. Пусть φ — произвольная функция на параллелограмме Π с вершинами A, B, C, D. Заметим, что когда точка z пробегает одну сторону параллелограмма, точка $z+\omega_1$ пробегает противоположную сторону параллелограмма в обратном направлении (относительно направления интегрирования по контуру). Поэтому имеет место формула

$$\int\limits_{\partial\Pi}\varphi(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{AB}\big[\varphi(\zeta+\omega_1)-\varphi(\zeta)\big]\,d\zeta - \int\limits_{AD}\big[\varphi(\zeta+\omega_2)-\varphi(\zeta)\big]\,d\zeta. \tag{3}$$

Теорема 4.6. *Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — нули функции f, а $a_1, \ldots, a_n$ — её полюса (дублированные с учётом кратности) внутри параллелограмма периодов. Тогда*

$$\sum a_k \equiv \sum b_k \pmod G. \tag{4}$$

□ Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{5}$$

Можно считать, что $f(0) \neq 0$, потому что можно всегда сделать сдвиг аргумента, но в силу периодичности сути дела это не поменяет. Если это так, то функция φ имеет полюса первого порядка ровно в тех точках, где у f были либо нули, либо полюса. Поскольку вычет логарифмической производной есть кратность нуля или полюса, получаем, что

$$\operatorname*{res}_{a_k}\varphi = a_k\cdot\operatorname*{res}_{a_k}\left(\frac{f'}{f}\right),\quad \operatorname*{res}_{b_k}\varphi = b_k\cdot\operatorname*{res}_{b_k}\left(\frac{f'}{f}\right). \tag{6}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi}\varphi(\zeta)\,d\zeta = \sum\operatorname{res}\varphi = \sum b_n - \sum a_n. \tag{7}$$

Пусть ω — период. Тогда

$$(z+\omega)\frac{f'(z+\omega)}{f(z+\omega)} = z\frac{f'(z)}{f(z)} + \omega\frac{f'(z)}{f(z)} \quad\Rightarrow\quad \omega\frac{f'(z)}{f(z)} = \varphi(z+\omega)-\varphi(z). \tag{8}$$

Теперь проинтегрируем это тождество по одной и по другой стороне параллелограмма, подставляя в него $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_2}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_1} \big[\varphi(\zeta+\omega_2) - \varphi(\zeta)\big]\, d\zeta. \\ \frac{\omega_1}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_2} \big[\varphi(\zeta+\omega_1) - \varphi(\zeta)\big]\, d\zeta. \end{aligned} \tag{9}$$

Вычитая из второго равенства первое и используя замечание перед теоремой, получаем

$$\frac{\omega_1}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta - \frac{\omega_2}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Pi} \varphi(\zeta)\, d\zeta. \tag{10}$$

По формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{z_0}^{z_0+\omega} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Var} \ln f(z). \tag{11}$$

В силу периодичности, когда точка ζ пробегает по отрезку $[z_0, z_0+\omega]$, точка $f(\zeta)$ пробегает замкнутую петлю. Как известно, приращение аргумента — это количество оборотов петли, умноженное на 2π. После сокращения на 2π получим целое число. Значит, для некоторых $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Pi} \varphi(\zeta)\, d\zeta = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \equiv 0 \pmod G. \tag{12}$$

Осталось вспомнить, что значение этого интеграла есть разность $\sum b_k - \sum a_k$. ■

4.2. Функция Вейерштрасса

Мы уже знаем, что эллиптических функций порядка $r < 2$ не существует. Сейчас мы предъявим функцию порядка 2. Это будет так называемая функция Вейерштрасса.

Здесь через G, как обычно, будем обозначать группу периодов.

4.2.1. Построение $\wp$-функции Вейерштрасса

Рассмотрим функцию

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in G}{}' \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right). \tag{13}$$

Покажем, что это определение корректно, то есть докажем, что этот ряд сходится как ряд мероморфных функций. В качестве системы раздувающихся компактов будем брать параллелограммы Π_n с вершинами в точках $\{n(\pm\omega_1 \pm \omega_2)\}$. Оценим каждое слагаемое исходного ряда по модулю:

$$\left| \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z^2}{\omega^2(z-\omega)} \right| \leqslant \frac{|z|^2}{|\omega|^2\big(|\omega| - |z|\big)}. \tag{14}$$

Мы группируем слагаемые, лежащие на границе параллелограммов Π_n. Для n-й группы справедлива следующая оценка:

$$S_n = \sum_{\omega\in\partial\Pi_n} \frac{|z|^2}{|\omega|^2\big(|\omega| - |z|\big)} \leqslant \sum_{\omega\in\partial\Pi_n} \frac{|z|^2}{C^2\cdot n^2\big(C\cdot n - |z|\big)} \leqslant \frac{8n\cdot|z|^2}{C^2\cdot n^2\big(C\cdot n - |z|\big)} \sim \frac{M}{n^2}. \tag{15}$$

Действительно, на границе Π_n лежит не более $8n$ периодов, а каждый период удалён от нуля не меньше, чем на $C\cdot n$. Поэтому при каждом фиксированном z приведённая оценка верна, и она гарантирует сходимость ряда $\sum S_n$, поскольку $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится.

Итак, корректность проверена. Теперь рассмотрим функцию

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in G}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right). \tag{16}$$

Отметим, что

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in G}\frac{1}{(z-\omega)^3}. \tag{17}$$

Производная $\wp(z)$ – двоякопериодическая функция просто в силу того, что она представляет из себя честную сумму по всей решётке периодов. Сдвинув z на w, мы не поменяем сумму. Это значит, что сама $\wp(z)$ будет отличаться в соседних периодических точках на одну и ту же константу, вне зависимости от того, какие соседние точки мы брали: $\forall z\ \wp(z+\omega_j)-\wp(z)=c_j$. Заметим, что $\wp$ является чётной, то есть $\wp(-z)=\wp(z)$. Поэтому подставив в предыдущее равенство $z=-\frac{\omega_j}{2}$, получим $\wp(\frac{\omega_j}{2})-\wp(-\frac{\omega_j}{2})=c_j=0$, $j=1,2$, что значит, что $\wp$ двоякопериодична.

Определение. Построенная функция $\wp$ называется *функцией Вейерштрасса.*

Непосредственно из определения видно, что $\wp$ является функцией порядка 2, так как элементы группы периодов — это в точности её полюса кратности 2.

Рассмотрим уравнение $\wp(z)=c$. Из свойств эллиптических функций второго порядка следует, что имеется в каждом параллелограмме периодов расположено ровно две c-точки z_1 и z_2. Кроме того, легко видеть, что $z_1+z_2\equiv 0 \pmod G$. Действительно, сумма нулей сравнима с суммой полюсов, а так как полюса находятся в узлах решётки, их сумма сравнима с нулём. Но между нулями и c-точками никакой разницы нет, потому что можно рассмотреть функцию $\wp(z)-c$, обладающую теми же полюсами.

Утверждение 4.7. *Равенство $\wp(z)=\wp(w)$ выполняется тогда и только тогда, когда $z\equiv w \pmod G$ или $z\equiv -w \pmod G$.*

□ Если это равенство выполнено, то w и z — это две $\wp(z)$-точки. Значит, их сумма сравнима с нулём. Обратно, если выполнено первое из сравнений, то равенство $\wp(z)=\wp(w)$ верно в силу периодичности $\wp$. Аналогично, из второго сравнения вытекает, что $\wp(z)=\wp(-w)$, но в силу чётности $\wp$ верно и доказываемое. ■

Рассмотрим точки

$$z_0\equiv 0,\quad z_1\equiv\frac{1}{2}\omega_1,\quad z_2\equiv\frac{1}{2}\omega_2,\quad z_3\equiv\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2). \tag{18}$$

Имеем $\wp(z_0)=\infty$. Введём обозначения:

$$e_i := \wp(z_i),\quad i=1,2,3. \tag{19}$$

Утверждение 4.8. *Значения e_i попарно различны.*

□ Непосредственно вытекает из предыдущего утверждения: z_i не сравнимы между собой (чтобы они стали сравнимыми, их нужно удвоить).

Другое доказательство: если, например, $e_1=e_3$, то функция $\wp(z)-e_1=\wp(z)-e_3$, имеющая один двойной полюс в П, имела бы там 4 нуля (точнее, 2 двукратных нуля в точках z_1 и z_2). Это невозможно. ■

Дифференцируя уравнение $\wp(z)=c$, получаем, что оно будет иметь двойные корни тогда и только тогда, когда $c=e_i$ для некоторого i. Это означает, что уравнение $\wp'(z)=0$ имеет решения $\frac12\omega_1$, $\frac12\omega_2$, $\frac12(\omega_1+\omega_2)$.

4.2.2. Дифференциальное уравнение для $\wp$

Рассмотрим функцию $\wp$ в малой окрестности $U(0)$. Имеем

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3}+H(z), \tag{20}$$

где H — голоморфная функция в U. Функция $\wp'$ имеет порядок $r=3$, а потому имеет 3 нуля в параллелограмме периодов. Но мы уже знаем три её нуля — это точки $\frac12\omega_1$, $\frac12\omega_2$, $\frac12(\omega_1+\omega_2)$. Далее, функция

$$f(z) = \big(\wp(z)-e_1\big)\big(\wp(z)-e_2\big)\big(\wp(z)-e_3\big) \tag{21}$$

имеет в нуле полюс 6-го порядка (потому что $\wp$ имеет в нуле двойной полюс).

Следовательно, эллиптическая функция

$$Q(z) = \frac{\big(\wp'(z)\big)^2}{f(z)} \tag{22}$$

не имеет нулей и полюсов в П, а потому является константой. Найдём её: в окрестности нуля имеем

$$\big(\wp'(z)\big)^2 = \frac{4}{z^6}+\ldots,\quad f(z)=\frac{1}{z^6}+\ldots, \tag{23}$$

откуда следует, что $Q\equiv 4$. Таким образом, функция Вейерштрасса удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\big(\wp'(z)\big)^2 = 4\big(\wp(z)-e_1\big)\big(\wp(z)-e_2\big)\big(\wp(z)-e_3\big). \tag{24}$$

Теперь выведем это уравнение другим способом. Напишем разложение функции $\wp(z)$ в окрестности нуля. Разложим дробь $\frac{1}{z-\omega}$ в геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{z-\omega} = -\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\omega}} = -\frac{1}{\omega}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\omega}\right)^k \tag{25}$$

и подставим полученный ряд в выражение для функции $\zeta(z)$:

$$\begin{aligned} &\zeta(z) = \frac{1}{z} + {\sum_{\omega\in G}}'\left(\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right) = \frac{1}{z} - {\sum_{\omega\in G}}'\left(\frac{z^2}{\omega^3}+\frac{z^3}{\omega^4}+\ldots\right) = \frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_n}{2n-1}z^{2n-1},\\ &c_n = (2n-1){\sum_{\omega\in G}}'\frac{1}{\omega^{2n}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Очевидно, коэффициенты c_n с нечётными номерами равны нулю, так как, с одной стороны, при замене ω на $(-\omega)$ сумма не меняется, поскольку все слагаемые те же, а с другой стороны, должна поменять знак.

Продифференцируем полученное выражение:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{2n-2}, \quad c_n = (2n-1){\sum_{\omega\in G}}'\frac{1}{\omega^{2n}}. \tag{27}$$

Теперь напишем ещё несколько уравнений:

$$\begin{aligned} \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_3 z^3 + \ldots,\\ \big(\wp'(z)\big)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{8c_2}{z^2} - 16c_3 + \ldots,\\ \wp^3(z) &= \frac{1}{z^6} + \frac{3c_2}{z^2} + 3c_3 + \ldots. \end{aligned} \tag{28}$$

Отсюда

$$\big(\wp'(z)\big)^2 - 4\wp^3(z) = -\frac{20c_2}{z^2} - 28c_3 + \ldots. \tag{29}$$

В этих уравнениях выписаны все члены, которые не стремятся к нулю при $z \to 0$. Получаем уравнение:

$$\big(\wp'(z)\big)^2 - 4\wp^3(z) + 20c_2\wp(z) = -28c_3 + \ldots. \tag{30}$$

В правой части стоит некоторая эллиптическая функция, не имеющая нулей и полюсов в параллелограмме периодов при $z \neq 0$. Но и точка $z = 0$ тоже не является полюсом. Стало быть, эта функция постоянна (а значит, равна числу $-28c_3$).

Введём обозначения:

$$g_2(z) := 20c_2 = 60{\sum_{\omega\in G}}'\frac{1}{\omega^4}, \quad g_3(z) := 28c_3 = 140{\sum_{\omega\in G}}'\frac{1}{\omega^6}. \tag{31}$$

В этих обозначениях получаем дифференциальное уравнение

$$\big(\wp'(z)\big)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp(z) - g_3. \tag{32}$$

Теперь подставим полученное выражение для квадрата производной в первое дифференциальное уравнение (24). Получим, что при любом значении x имеет место равенство

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3). \tag{33}$$

Значит, числа e_i есть корни кубического уравнения $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$.

Определение. Величину $\Delta := 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2$ называют *дискриминантом.*

Из формул Виета получаем уравнения на e_i:

$$\begin{cases} e_1+e_2+e_3 = 0,\\ e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1 = -\frac{1}{4}g_2,\\ e_1e_2e_3 = -\frac{1}{4}g_3,\\ \Delta = g_2^3 - 27g_3^2. \end{cases} \tag{34}$$

Дискриминант многочлена, как известно, равен нулю тогда и только тогда, когда он имеет кратные корни. Вывод: если периоды ω_1 и ω_2 таковы, что $\Delta(g_2,g_3) = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, то можно найти функцию с такими периодами.

4.2.3. Выражение эллиптических функций через функцию Вейерштрасса

Теорема 4.9. *Любую эллиптическую функцию с периодами ω_1 и ω_2 можно представить в виде*

$$f(z) = R\big(\wp(z)\big) + R_1\big(\wp(z)\big)\wp'(z), \tag{35}$$

где R и R_1 — рациональные функции.

□ Сначала докажем, что любую чётную эллиптическую функцию можно представить в таком виде. Если точка a — нуль (или полюс) функции f, то точка $(-a)$ — тоже нуль (или полюс) этой функции. Если $a \equiv -a$, то кратность нуля (полюса) удваивается. Значит, порядок функции f есть чётное число. Пусть $b'_1, \ldots, b'_{2n}$ — все нули функции f (с учётом кратностей), и $a'_1, \ldots, a'_{2n}$ — все полюса, также с учётом кратностей.

Полюса $a'_1, \ldots, a'_{2n}$ разбиваются на пары $\{a_{k_1}, a_{k_2}\}$, в каждой из которых $a_{k_1} + a_{k_2} \equiv 0$. Возьмём от каждой пары по одному представителю, получим набор $a_1, \ldots, a_n$. Аналогичную процедуру проделаем с нулями.

Рассмотрим функцию

$$Q(z) := \frac{\big(\wp(z) - \wp(b_1)\big) \cdot \ldots \cdot \big(\wp(z) - \wp(b_n)\big)}{\big(\wp(z) - \wp(a_1)\big) \cdot \ldots \cdot \big(\wp(z) - \wp(a_n)\big)}. \tag{36}$$

Её полюса есть точки $a_1, \ldots, a_n$ и $(-a_1), \ldots, (-a_n)$, а нули — точки $b_1, \ldots, b_n$ и $(-b_1), \ldots, (-b_n)$ ввиду чётности функции Вейерштрасса. Но с другой стороны, наша функция тоже чётна, и имеет тот же набор нулей и полюсов с теми же кратностями. Значит, функция $\frac{f(z)}{Q(z)}$ не имеет полюсов и нулей на параллелограмме периодов, а стало быть, она постоянна. Таким образом, $f = R(\wp)$.

С нечётными функциями поступим так: поскольку функция $\wp'(z)$ нечётна (как производная чётной функции), функция $\frac{f(z)}{\wp'(z)}$ уже будет чётной. Значит, $f(z)$ представима в виде $R_1\big(\wp(z)\big)\wp'(z)$.

В общем случае произвольную функцию представим в виде суммы чётной и нечётной:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) + f(-z)\right] + \frac{1}{2}\left[f(z) - f(-z)\right]. \tag{37}$$

Значит, $f(z) = R\big(\wp(z)\big) + R_1\big(\wp(z)\big)\wp'(z)$. ■

4.2.4. Униформизация кубической кривой

Пусть в пространстве $\mathbb{C}^2$ была задана кривая $C := \{P_n(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Вложим $\mathbb{C}^2(x, y)$ в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2(x : y : z)$ (выше подробно объяснялось, как это сделать) и рассмотрим однородный многочлен

$$\widetilde{P}(x, y, z) := z^n P_n\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right). \tag{38}$$

Определение. Кривая $\overline{C} := \left\{\widetilde{P}(x, y, z) = 0\right\} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ называется *проективным замыканием* кривой C.

Рассмотрим кривую

$$C := \left\{y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\right\}. \tag{39}$$

Тогда её проективным замыканием будет кривая

$$\overline{C} := \left\{zy^2 = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3\right\}. \tag{40}$$

Пусть $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Покажем, что тогда $\overline{C}$ будет комплексным многообразием. Применим теорему о неявной функции. Для этого нужно показать, что в каждой точке кривой либо $P'_x \neq 0$, либо $P'_y \neq 0$. Имеем $P(x, y) = -y^2 + 4x^3 - g_2 x - g_3$, тогда $P'_x = 12x^2 - g_2$, $P'_y = -2y$. Обратимости не будет тогда, когда одновременно обнуляется и сам многочлен, и его производная. Но у нас кратных корней нет, поэтому всё хорошо.

Рассмотрим функцию $y = 2\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}$. У неё 4 особых точки: e_1, e_2, e_3, ∞. Риманова поверхность этой функции гомеоморфна сфере с одной ручкой (это следует из формулы Римана–Гурвица: количество ручек для римановой поверхности алгебраической функции $w^2 = P_n(z)$ есть $g = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, если многочлен P_n не имеет кратных корней — а в нашем случае оно так и есть), то есть двумерному тору. С другой стороны, многообразие $\mathbb{C}/G$, где G — группа периодов, также есть двумерный тор.

Кривую C можно параметризовать, положив

$$\begin{cases} x = \wp(z), \\ y = \wp'(z), \end{cases} \tag{41}$$

где $\wp(z)$ — функция, являющаяся решением уравнения (32).

Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon \mathbb{C}/G \to \overline{C}, \text{ определённое по правилу } \varphi(t) := \big(\wp(t) : \wp'(t) : 1\big). \tag{42}$$

Заметим, что оно биективно: если функция Вейерштрасса принимает в каких-то точках t_1 и t_2 одинаковое значение, то $t_1 = -t_2$ (с точностью до периода), но в этих точках значения производной различны (и если $\wp(t) = 0$, то $\wp(t) \neq 0$). Значит, образы точек t_1 и t_2 будут различными.

Говорят, что функция Вейерштрасса *униформизует* данную кубическую кривую.

5. Приложение

Задача 5.1. *Найти в бидиске P последовательность $z_n \to 0$ такую, что для всех голоморфных в P функций f выполняется свойство $f = 0$ если и только если $f(z_n) = 0$ для всех z_n.*